Correction de l'exercice de spécialité du type bac du 3 décembre 2013

1. Cours.
2. a.

$2^1 = 2$ donc $2^1 \equiv 2(7)$
$2^2 = 4$ donc $2^2 \equiv 4(7)$
$2^3 = 8$ donc $2^3 \equiv 1(7)$
donc l'ordre de 2 modulo 7 est 3.

$3^1 = 3$ donc $3^1 \equiv 3(7)$
$3^2 = 9$ donc $3^2 \equiv 2(7)$
$3^3 = 27 = 7\times3+6$ donc $3^3 \equiv 6(7)$
$3^4 = 81 = 7\times11+4$ donc $3^4 \equiv 4(7)$
$3^5 = 243 = 7\times34+5$ donc $3^5 \equiv 5(7)$
$3^6 = 729 = 7\times104+1$ donc $3^6 \equiv 1(7)$
donc l'ordre de 3 modulo 7 est 6.

b.

Variables
a , k : nombres entiers
Initialisation
k prend la valeur 1
Entrée
Saisir un nombre entier a compris entre 2 et 6
Traitement
Tant que $a^k - k\times$partie entière$\left(\frac{a^k}{7}\right)\neq 1$
    k prend la valeur $k+1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher "l'ordre de a modulo 7 est "
Afficher k

c. A l'aide de la programmation de l'algorithme demandé, on obtient les résultats suivants :
- l'ordre de 2 modulo 7 est 3
- l'ordre de 3 modulo 7 est 6
- l'ordre de 4 modulo 7 est 3
- l'ordre de 5 modulo 7 est 6
- l'ordre de 6 modulo 7 est 2

d. L'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6 est un diviseur de 6.

3. a. a est un entier naturel non divisible par 7
donc lorsqu'il existe couple d'entiers naturel $(k;r)$ tel que $a = 7k+r$ avec $0 < r < 7$
$a \equiv r(7)$ donc $a^6 \equiv r^6(7)$.
a étant non divisible par 7, $r \neq 0$, donc il n'y a que 6 valeurs possibles pour r :

- Pour $r = 1$, on a :
  $r^6 = 1$ donc $r^6 \equiv 1(7)$ donc $a^6 \equiv 1(7)$
- Pour $r = 2$, on a :
  $r^6 = 64 = 9\times7+1$ donc $r^6 \equiv 1(7)$ donc $a^6 \equiv 1(7)$
- Pour $r = 3$, on a :
  $r^6 = 729 = 104\times7+1$ donc $r^6 \equiv 1(7)$ donc $a^6 \equiv 1(7)$
- Pour $r = 4$, on a :
  $r^6 = 4096 = 585\times7+1$ donc $r^6 \equiv 1(7)$ donc $a^6 \equiv 1(7)$
- Pour $r = 5$, on a :
  $r^6 = 15625 = 2232\times7+1$ donc $r^6 \equiv 1(7)$ donc $a^6 \equiv 1(7)$
- Pour $r = 6$, on a :
  $r^6 = 46656 = 6665\times7+1$ donc $r^6 \equiv 1(7)$ donc $a^6 \equiv 1(7)$

Donc, pour tout entier r tel que $0 < r < 7$, on a $r^6 \equiv 1(7)$ donc $a^6 \equiv 1(7)$.

b. Soit r le reste de la division euclidienne de 6 par k, on a $6 = qk+r$ avec q un entier naturel.

$6 = qk+r$ donc $a^6 = a^{qk+r} = (a^k)^q \times a^r$

or $a^6 \equiv 1(7)$, donc $(a^k)^q \times a^r \equiv 1(7)$.

De plus, k étant l'ordre de a modulo 7, on a $a^k \equiv 1(7)$,

donc $(a^k)^q \equiv 1(7)$

donc $(a^k)^q \times a^r \equiv a^r(7)$,

or $(a^k)^q \times a^r \equiv 1(7)$ donc $a^r \equiv 1(7)$.

Or k est le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1(7)$ et $r < k$ donc $r = 0$ et $kq = 6$ avec q un entier naturel, donc k divise 6.

Les valeurs possibles de k sont donc 1; 2; 3 et 6.

c. $4^1 = 4$ donc $4^1 \equiv 4(7)$

$4^2 = 16$ or $16 = 2\times7+2$ donc $4^2 \equiv 2(7)$

$4^3 = 64$ or $64 = 9\times7+1$ donc $4^3 \equiv 1(7)$,

donc l'ordre de 4 modulo 7 est 3.

$5^1 = 5$ donc $5^1 \equiv 5(7)$

$5^2 = 25$ or $16 = 3\times7+4$ donc $5^2 \equiv 4(7)$

$5^3 = 125$ or $16 = 125\times7+6$ donc $5^3 \equiv 6(7)$,

L'ordre de 5 modulo 7 étant un diviseur non nul de 6, il ne peut plus être que 6,

donc l'ordre de 5 modulo 7 est 6.

$6^1 = 6$ donc $6^1 \equiv 6(7)$

$6^2 = 36$ or $36 = 5\times7+1$ donc $6^2 \equiv 1(7)$,

donc l'ordre de 6 modulo 7 est 2.

4. $A_{2013} = 2^{2013}+3^{2013}+4^{2013}+5^{2013}+6^{2013}$.

$2013 = 3\times671$ donc $2^{2013} = 2^{3\times671} = (2^3)^{671}$ or $2^3 \equiv 1(7)$ donc $2^{2013} \equiv 1^{671}(7)$ donc $2^{2013} \equiv 1(7)$.

$2013 = 6\times335+3$ donc $3^{2013} = 3^{6\times335+3} = (3^6)^{335}\times3^3$ or $2^3 \equiv 1(7)$ donc $3^{2013} \equiv 3^3(7)$ donc $3^{2013} \equiv 6(7)$.

$2013 = 3\times671$ donc $4^{2013} = 4^{3\times671} = (4^3)^{671}$ or $4^3 \equiv 1(7)$ donc $4^{2013} \equiv 1^{671}(7)$ donc $4^{2013} \equiv 1(7)$.

$2013 = 6\times335+3$ donc $5^{2013} = 5^{6\times335+3} = (5^6)^{335}\times5^3$ or $5^3 \equiv 1(7)$ donc $5^{2013} \equiv 5^3(7)$ donc $5^{2013} \equiv 6(7)$.

$2013 = 6\times1006+1$ donc $6^{2013} = 6^{2\times1006+1} = (6^2)^{1006}\times6$ or $2^3 \equiv 1(7)$ donc $6^{2013} \equiv 6(7)$.

Donc, $A_{2013} \equiv 1+6+1+6+6(7)$

donc $A_{2013} \equiv 20(7)$, or $20 = 2\times7+6$,

donc $A_{2013} \equiv 6(7)$.