TS spécialité

exo type bac

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et B la matrice colonne $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On considère la suite de matrices colonnes de terme général $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ définie par $U_0 = B$ et $U_{n+1} = A \times U_n$.

   a. Montrer qu'il existe un réel k tel que $A \times B = kB$.

   b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 2U_n$.

   c. Montrer que pour tout tout entier naturel n, $U_n = 2^n U_0$ et en déduire l'expression de x_n et y_n en fonction de n.

2. On considère les suites (z_n) et (t_n) définies par $z_0 = 0$, $t_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n + t_n$ et $t_{n+1} = -\frac{3}{4} z_n + \frac{5}{2} t_n$. On note (V_n) la suite de terme général $V_n = \begin{pmatrix} z_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

   a. Justifier que $V_{n+1} = A \times V_n$.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. a. Donner l'expression de z_n et t_n en fonction de n et en déduire que z_n et t_n sont des entiers naturels.

   b. Montrer que pour tout entier n strictement positif, tout diviseur commun de z_n et t_n est un diviseur de 4.

   c. En déduire que pour tout $n > 0$, z_n et t_n sont premiers entre eux.