TS spécialité

corrigé de du Type Bac n°2

1. a. $A\times B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}=2B$.

   b. Soit P_n la proposition : $U_{n+1}=2U_n$.
   d'une part, $U_1=A\times U_0=A\times B=2B$ donc P_0 est vraie.
   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $U_{p+1}=2U_p$, alors
   $U_{p+2}=A\times U_{p+1}=A\times 2U_p=2A\times U_p=2U_{p+1}$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $U_{n+1}=2U_n$.
   c. Soit P_n la proposition : $U_n=2^n\times U_0$. $2^0U_0=U_0$ donc P_0 est vraie.
   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $U_p=2^p\times U_0$, alors
   $U_{p+1}=2U_p=2\times 2^pU_0=2^{p+1}U_0$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $U_n=2^nU_0$. $U_n=2^n\times\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n\times 2\\2^n\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}\\3\times 2^n\end{pmatrix}$ donc $x_n=2^{n+1}$ et $y_n=3\times 2^n$.

2. a. $A\times V_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}z_n\\t_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}z_n+t_n\\ -\frac{3}{4}z_n+\frac{5}{2}t_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_{n+1}\\t_{n+1}\end{pmatrix}=V_{n+1}$

   b. Soit P_n la proposition : $V_n=U_n-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
   $V_0=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $U_0-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ donc P_0 est vraie. Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $V_p=U_p-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, alors
   $V_{p+1}=A\times V_p=A\times\left(U_p-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=A\times U_p-A\times\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=U_{p+1}-A\times\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ or
   $A\times\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ donc $V_{p+1}=U_{p+1}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $V_n=U_n-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

3. a. $z_n=x_n-2=2^{n+1}-2=2(2^n-1)$ et $t_n=y_n-1=3\times 2^n-1$. Comme $n\geq 0$, $2^n\geq 1$ et z_n et t_n sont des entiers naturels.
   b. Soit d un diviseur positif commun de $2(2^n-1)$ et de $3\times 2^n-1$. On a alors, pour tout entier n , $d\,|\,(2(3\times 2^n-1)-3(2(2^n-1)))\ \Leftrightarrow\ d\,|\,4$ donc $d=1$, $d=2$ ou $d=4$.
   c. $n>0$ donc 2^n est pair et par suite, $3\times 2^n-1$ est impair. Or $d|(3\times 2^n-1)$ donc $d=1$ et on peut en conclure que z_n et t_n sont premiers entre eux.