TS spécialité

corrigé de du Type Bac n°3

1. a. Si d n'est pas multiple de $PGCD(a;b)$, on ne peut pas sortir de la boucle car quels que soient u et v, $a\times u+b\times v\neq d$. Donc l'algorithme ne s'arrête pas.

   Cet algorithme cherche à déterminer une solution particulière $(u;v)$ de l'équation $a\times u+b\times v=d$.

   b. L'algorithme précédent donne comme solution $u=5$ et $v=-2$ ($u=-2$ et $v=1$ est aussi une solution pertinente, obtenue par l'algorithme avec $a=7$ et $b=3$)

   $x_0=5\times10^{2n}$ et $y_0=-2\times10^{2n}$ est donc une solution particulière de (E).

   c. $3x+7y=10^{2n} \Leftrightarrow 3x+7y=3\times5\times10^{2n}+7\times(-2)\times10^{2n} \Leftrightarrow 3(x-5\times10^{2n})=-7(y+2\times10^{2n})$

   Cette dernière équation implique $7\mid 3(x-5\times10^{2n})$ or 7 et 3 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss $7\mid(x-5\times10^{2n})$ et il existe un entier k tel que

   $x-5\times10^{2n}=7k \Leftrightarrow x=5\times10^{2n}+7k$. En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient

   $3(7k)=-7(y+2\times10^{2n}) \Leftrightarrow y=-2\times10^{2n}-3k$. On vérifie immédiatement que quel que soit l'entier k, le couple $(5\times10^{2n}+7k;-2\times10^{2n}-3k)$ est solution de (E). C'est donc l'ensemble cherché.

2. a. $100=7\times14+2$ donc $100\equiv2(7)$.

   b. D'une part, $10^{2n}=(10^2)^n=100^n$ et $100\equiv2(7)$ donc $10^{2n}\equiv2^n(7)$. D'autre part, pour tout entier y, $7y^2\equiv0(7)$ donc $3x^2+7y^2\equiv3x^2(7)$. Donc si $3x^2+7y^2=10^{2n}$ alors $3x^2\equiv2^n(7)$.

   c. On a :

Reste de la division euclidienne de x par 7	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7	3	5	6	6	5	3

   d. $2^1=2\equiv2(7)$, $2^2=4\equiv4(7)$ et $2^3=8\equiv1(7)$. Par ailleurs, pour tout entier n, il existe des entiers q et r tels que $n=3q+r$ avec $r\in\{0;1;2\}$. Donc $2^n=2^{(3q+r)}=(2^3)^q\times2^r\equiv2^r(7)$.

   Comme $r\in\{0;1;2\}$, ceci prouve que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

   la question précédente montre que pour tout entier x, $3x^2$ est congru à 3, 5 ou 6 modulo 7 et donc, $3x^2$ et 2^n ne peuvent pas être congrus modulo 7 et l'équation (G) n'a donc pas de solution.