BACCALAURÉAT BLANC		**Session 2015**
***Épreuve de* : MATHÉMATIQUES**		
***Série* : S**	***Durée* : 4 heures**	***Coefficient* : 7**

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices. Il est demandé de traiter chaque exercice sur des copies séparées.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille **Annexe** correspondant à l'exercice que vous aurez traité sera à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (*5 points*)
(Commun à tous les candidats)

À chacune des 5 affirmations suivantes, répondre par « VRAI » ou par « FAUX », en ***justifiant****.*

1. f est la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère du plan. La tangente à (C) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x$.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x > 2x$.

3. La suite (u_n) définie par $u_n = e^{-2n}$ est géométrique.

4. Pour tout nombre réel a et pour tout nombre réel b, $e^{a+b} = \sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$.

5. Soient f et g deux fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$, g ne s'annulant pas :

$$\text{si } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1.$$

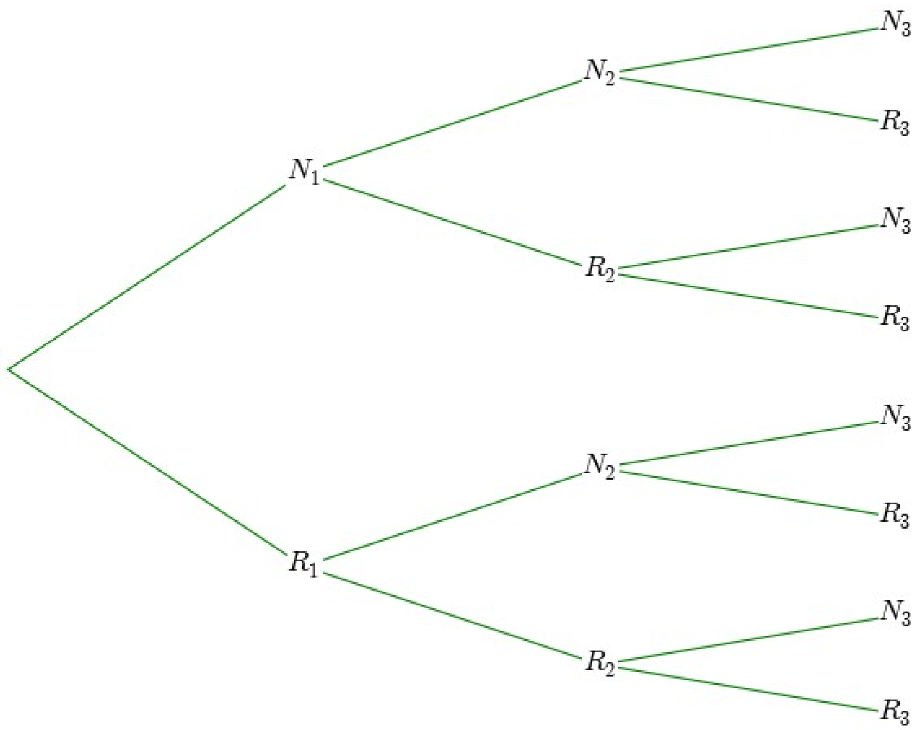
Exercice 2 : (*5 points*)
(Commun à tous les candidats)

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3. Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. a) Calculer la probabilité des événements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

   b) En déduire la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.

   c) Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.

3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'événement N_3.

4. Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 3 : (*5 points*)
(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

   a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $g(x) = x^2 e^x - 1$.

   Étudier le sens de variation de la fonction g.

   b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703 ; 0{,}704[$.

   c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;+\infty[$.

2. Étude de la fonction f

   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

   c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

   d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$.

   e) Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.

Exercice 4 : (*5 points*)
(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=5-\dfrac{4}{x+2}$.

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe C représentative de f ainsi que la droite D d'équation $y=x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On note α la solution. On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

   Sur la figure de l'**annexe 1**, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

   Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
4. a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha$ où α est le réel défini dans la question 2.

   b) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+...+u_n$.

   a) Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

   b) Compléter l'algorithme donné (**annexe 2**) pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

   c) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 4 : (*5 points*)
(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que $A < B$:

Entrées :	A et B entiers naturels tels que $A < B$
Variables :	D est un entier.
	Les variables d'entrées A et B
Traitement :	Affecter à D la valeur de $B-A$
	Tant que $D > 0$
	B prend la valeur de A
	A prend la valeur de D
	Si $B>A$ alors
	D prend la valeur de $B-A$
	sinon
	D prend la valeur de $A-B$
	fin Si
	fin Tant que
Sortie :	Afficher A

1. On entre $A = 12$ et $B = 14$.

   En remplissant le tableau donné dans l'annexe 3, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

2. Cet algorithme calcule la valeur du $PGCD$ des nombres A et B .

   En entrant $A = 221 \; et \; B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1 .

   a) Justifier qu'il existe des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) $221\,x-331\,y = 1$.

   b) Vérifier que le couple $(3\,;2)$ est une solution de l'équation (E) .

   En déduire l'ensemble des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) .

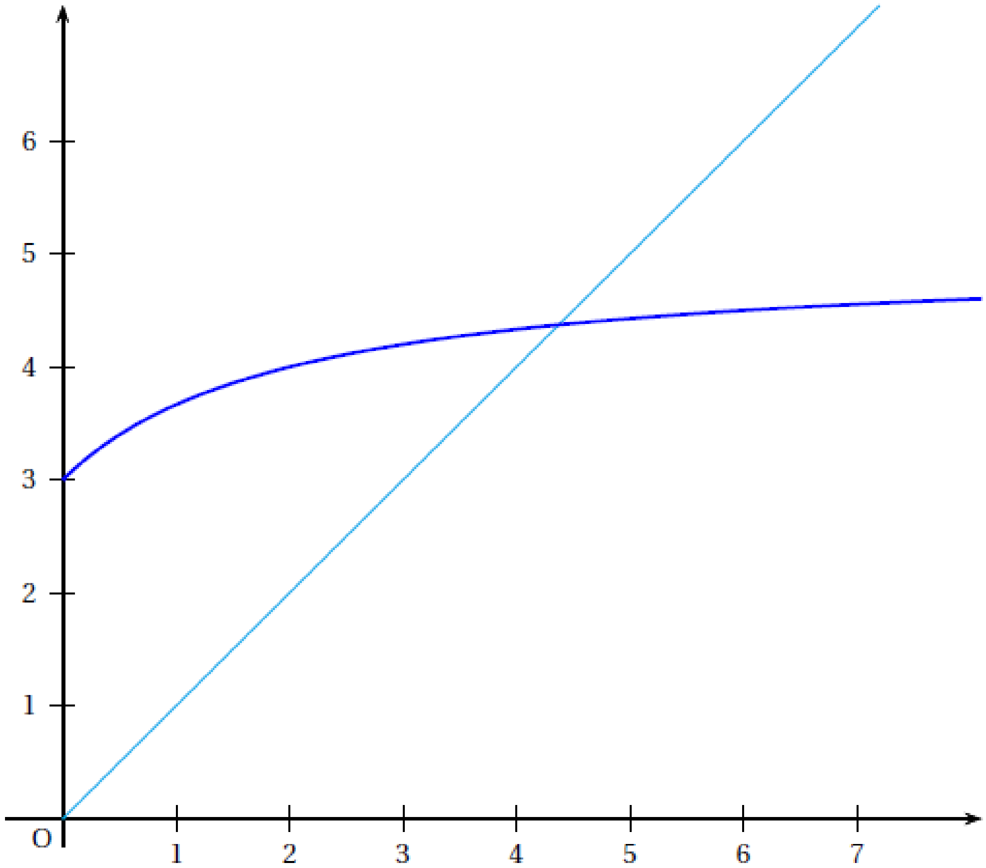
3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n

   par : $u_n = 2+221\,n$ et $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n+331 \end{cases}$.

   a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n .

   b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p\,;q)$ tels que $u_p = v_q$, $0 \leq p \leq 500$ et $0 \leq q \leq 500$.

Annexe 1



Annexe 2

Entrée :	n un entier naturel.
Variables :	u et s sont des variables réelles,
	n et i sont des variables entières.
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	demander la valeur de n .
Traitement :	Tant que . . .
	affecter à i la valeur $i+1$
	affecter à u la valeur . . .
	affecter à s la valeur . . .
	fin Tant que.
Sortie :	afficher s .

Annexe 3

A	*B*	*D*
12	14	