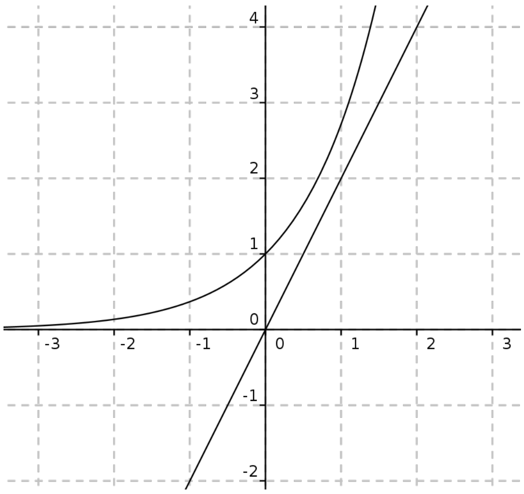
CORRECTION DU BAC BLANC

Terminale S	*Le 18 février 2015*

Exercice 1

1. L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $f'(0)$.
   Or $f'(x)=\dfrac{-(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$, d'où : $f'(0)=-\dfrac{1}{(1+1)^2}=-\dfrac{1}{4}$.

   Par conséquent, l'affirmation est VRAIE.

2. 

   On en déduit graphiquement, que pour tout réel x, $e^x \geq 2x$.

   Par conséquent, l'affirmation est VRAIE.

3. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{e^{-2n-2}}{e^{-2n}}=\dfrac{e^{-2n}\times e^{-2}}{e^{-2n}}=e^{-2}$ pour tout entier naturel n. Donc, la suite (u_n) est géométrique de raison e^{-2} ; l'affirmation est donc VRAIE.

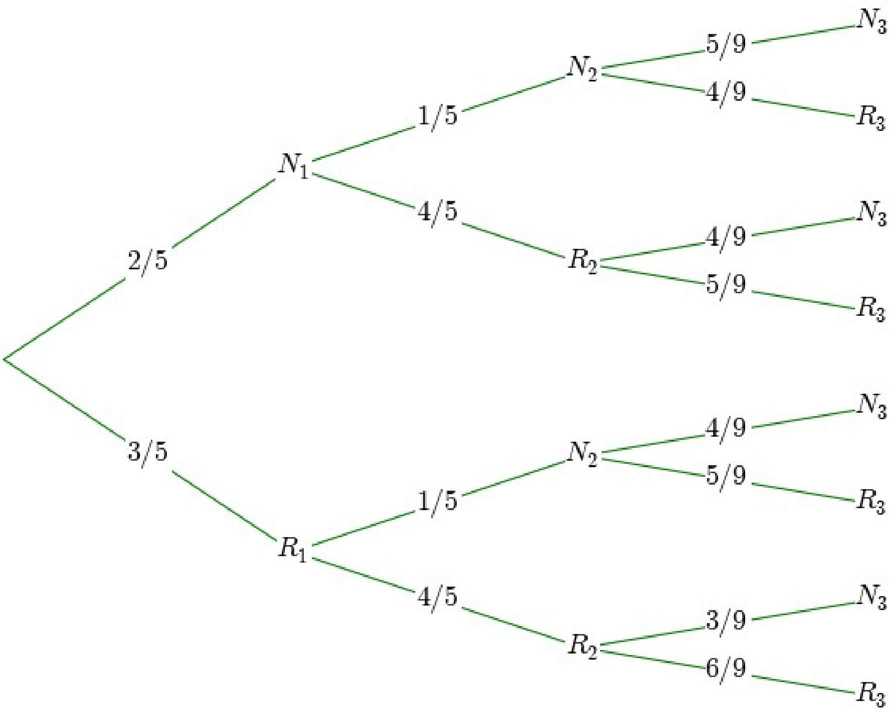
4. $\sqrt{e^{2a}\times e^{2b}}=\sqrt{(e^a)^2}\times\sqrt{(e^b)^2}=e^a\times e^b=e^{a+b}$, pour tout nombre réel a et pour tout nombre réel b ; l'affirmation est donc VRAIE.

5. Soients f et g deux fonctions définies sur $]0;+\infty[$ g ne s'annulant pas, définies par :
   $f(x)=-x+3$ et $g(x)=x^2$.
   On a $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\end{cases}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=0$.

   L'affirmation est donc FAUSSE.

Exercice 2 *(La Réunion, juin 2005)*

1.



2. a)

$$p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{45}.$$

$$p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{225}.$$

b) On remarque que $N_1 \cap N_3 = (N_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap R_2 \cap N_3)$ où $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$ sont deux événements disjoints. On en déduit que

$$p(N_1 \cap N_3) = p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{45} + \frac{32}{225} = \frac{42}{225} = \frac{14}{75}.$$

c) On remarque que $R_1 \cap N_3 = (R_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (R_1 \cap R_2 \cap N_3)$ où $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $R_1 \cap R_2 \cap N_3$ sont deux événements disjoints. On en déduit que :

$$p(R_1 \cap N_3) = p(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9} = \frac{48}{225} = \frac{16}{75}.$$

3. N_3 est la réunion des deux événements disjoints $N_1 \cap N_3$ et $R_1 \cap N_3$.

Alors $p(N_3) = p(N_1 \cap N_3) + p(R_1 \cap N_3) = \frac{14}{75} + \frac{16}{75} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$.

4. $p(N_1) \times p(N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$. D'après la question 2.b, $p(N_1) \times p(N_3) \neq p(N_1 \cap N_3)$.

Donc les événements N_1 et N_3 ne sont pas indépendants.

5. On recherche $p_{N_3}(R_1)$. Or $p_{N_3}(R_1) = p\frac{(N_3 \cap R_1)}{p}(N_3) = \frac{\frac{16}{75}}{\frac{2}{5}} = \frac{16}{75} \times \frac{5}{2} = \frac{8}{15}$.

Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge est égale à $\frac{8}{15}$.

Exercice 3 *(Nouvelle-Calédonie, décembre 2013)*

1. a) On a $g = uv - 1$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$.

   D'où g est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$. On en déduit que $g'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)-0$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$. Donc pour tout réel positif x, $g'(x) = 2xe^x+x^2e^x = xe^x(2+x)$.

   Comme x appartient à $[0;+\infty[$, alors $g'(x) \geq 0$. De plus, si $x > 0$ alors $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

   b) La fonction g est dérivable, donc continue, sur $[0;+\infty[$. De plus, elle strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^x = +\infty$ (par produit de limites).

   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (par somme de limites).

   $g(0) = 0 - 1 = -1$, $0 \in [-1;+\infty[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel a appartenant à $[0;+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

   Comme $g(0{,}703) \approx -0{,}002$ et $g(0{,}704) \approx 0{,}002$, alors $a \in]0{,}703;0{,}704[$.

   c) On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		a		$+\infty$
g	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   Par conséquent : - si $x < a$, $g(x) < 0$

   -si $x = a$, $g(x) = 0$

   -si $x > a$, $g(x) > 0$

2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (par somme de limites).

   $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x > 0}} e^x = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$; alors $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ (par somme de limites).

   b) On a $f = v+w$ avec $w(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = e^x$. D'où f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. On en déduit que $f' = v'+w'$ avec $w'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $v'(x) = e^x$.

   Pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}+e^x = \dfrac{x^2e^x-1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) Comme $x \in]0 ; +\infty[$, alors $x^2 > 0$; par suite, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$.

On en déduit le tableau des variations :

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

d) D'après la question précédente, f admet un minimum $f(a)$.

Or $f(a) = e^a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{a\,e^a + 1}{a}$ et $g(a) = 0$, c'est-à-dire $a^2 e^a - 1 = 0$. D'où $e^a = \dfrac{1}{a^2}$ car $a \in]0 ; +\infty[$.

Donc $f(a) = \dfrac{a\,e^a + 1}{a} = \dfrac{a \times \dfrac{1}{a^2} + 1}{a} = \dfrac{1+a}{a^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

Par conséquent, la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

e) Comme $a \in]0{,}703 ; 0{,}704[$, alors $\dfrac{1}{0{,}704} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{0{,}703}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$. Par suite, $\left(\dfrac{1}{0{,}704}\right)^2 < \left(\dfrac{1}{a}\right)^2 < \left(\dfrac{1}{0{,}703}\right)^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

On en déduit que $\dfrac{1}{0{,}704} + \left(\dfrac{1}{0{,}704}\right)^2 < m < \dfrac{1}{0{,}703} + \left(\dfrac{1}{0{,}703}\right)^2$ ce qui amène à $\dfrac{1{,}704}{0{,}704^2} < m < \dfrac{1{,}703}{0{,}703^2}$.

Or $\dfrac{1{,}704}{0{,}704^2} \approx 3{,}438$ et $\dfrac{1{,}703}{0{,}703^2} \approx 3{,}446$ Par conséquent, $3{,}43 < m < 3{,}45$.

Exercice 4 *(Nouvelle-Calédonie, décembre 2014)*

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

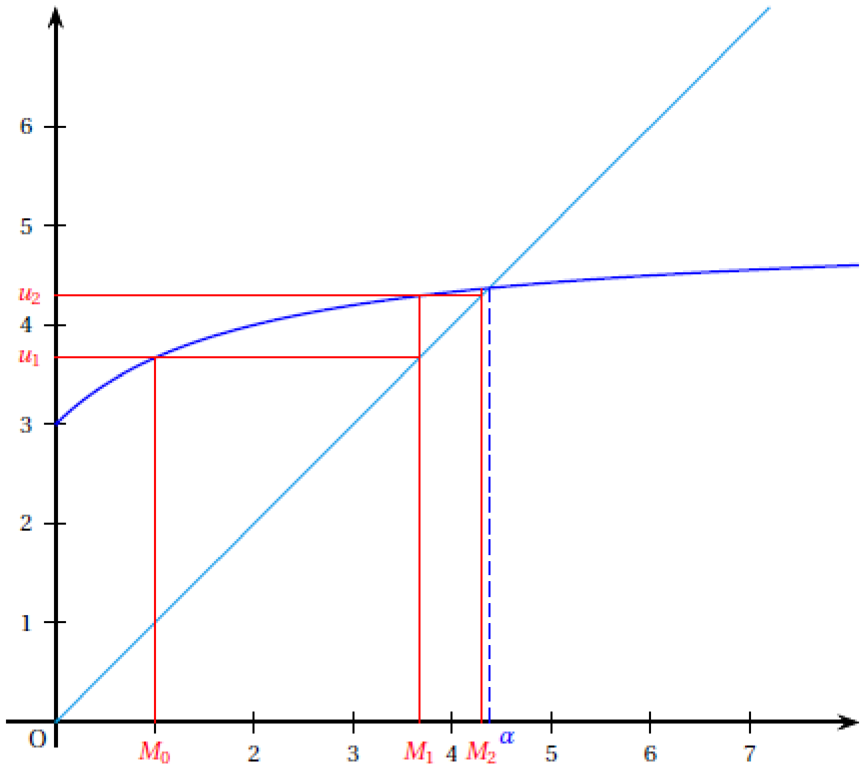
   On a $f = 5-4u$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x+2}$. D'où $f' = -4u'$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

   Donc $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2}$, pour tout réel x positif. On en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0;+\infty[$. Par conséquent, f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. $f(x) = x \Leftrightarrow 5-\dfrac{4}{x+2} = x \Leftrightarrow 5-x = \dfrac{4}{x+2} \Leftrightarrow (5-x)(x+2) = 4$ (car -2 n'est pas solution de l'équation). Donc $f(x) = x \Leftrightarrow -x^2+3x+6 = 0$.

   Pour ce trinôme, $\Delta = 3^2-4\times(-1)\times 6 = 33 > 0$. L'équation $-x^2+3x+6 = 0$ admet alors deux solutions : $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2\times(-1)} = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} > 0$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{33}}{2\times(-1)} = \dfrac{3-\sqrt{33}}{2} < 0$.

   Par conséquent, l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow -x^2+3x+6 = 0$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0;+\infty[$: $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \approx 4{,}37$.

3. 

   Il semble que la suite (u_n) soit croissante et qu'elle converge vers α.

4. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, soit P_n la proposition : « $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ »

   Initialisation : Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = 5-\dfrac{4}{3} = \dfrac{11}{3}$, on a bien $0 \le u_0 \le u_1 \le \alpha$. Par suite, on a P_0 qui est vraie.

   Hérédité : Soit $p \ge 0$. Supposons que P_p est vraie. Alors : $0 \le u_p \le u_{p+1} \le \alpha$.

   Comme f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, alors $f(0) \le f(u_p) \le f(u_{p+1}) \le f(\alpha)$.

Or $f(0)=3\geq 0$, $f(u_p)=u_{p+1}$, $f(u_{p+1})=u_{p+2}$ et $f(\alpha)=\alpha$.

D'où $0\leq u_{p+1}\leq u_{p+2}\leq\alpha$. On en déduit que P_{p+1} est vraie.

On a alors prouvé :

P_0 et pour tout p supérieur ou égal à 0 , $P_p\Rightarrow\ P_{p+1}$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

Pour tout n supérieur ou égal à 0 , P_n est vraie donc : pour tout n de $\mathbb{N}$,

$0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\alpha$.

b) Comme pour tout entier naturel n , $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\alpha$, alors la suite (u_n) est croissante. De plus, la suite (u_n) est majorée par α ; or une suite croissante et majorée est une suite convergente. Donc la suite (u_n) converge.

5. a) $S_0=u_0=1$; $S_1=u_0+u_1=1+\frac{11}{3}=\frac{14}{3}\approx 4{,}67$;

$$S_2=S_1+u_2=\frac{14}{3}+5-\frac{4}{\frac{11}{3}+2}=\frac{29}{3}-\frac{4}{\frac{17}{3}}=\frac{29}{3}-\frac{12}{17}=\frac{457}{51}\approx 8{,}96\ .$$

b)

Entrée :	n un entier naturel.
Variables :	u et s sont des variables réelles,
	n et i sont des variables entières.
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	demander la valeur de n .
Traitement :	Tant que $i\leq n$ . . .
	affecter à i la valeur $i+1$
	affecter à u la valeur $5-\frac{4}{u+2}$
	affecter à s la valeur $s+u$
	fin Tant que.
Sortie :	afficher s .

c) Comme la suite (u_n) est croissante, alors pour tout entier naturel n , $u_n\geq u_0$, c'est-à-dire $u_n\geq 1$. On en déduit que $S_n=u_0+u_1+...+u_n\geq n+1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1=+\infty$; donc par comparaison des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$.

Exercice 4 *(Nouvelle-Calédonie, décembre 2014)*

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1.

A	B	D
12	14	2
2	12	10
10	2	8
8	10	2
2	8	6
6	2	4
4	6	2
2	4	2
2	2	0

L'algorithme affiche la valeur 2.

2. a) En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1 comme $PGCD$ des deux nombres A et B.

Cela signifie que les nombres 221 et 331 sont premiers entre eux. Donc, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(x\,;y)$ d'entiers relatifs tel que $221\,x-331\,y = 1$.

b) $221\times3-331\times2 = 1$. Donc le couple $(3\,;2)$ est une solution de l'équation (E).

Soit (x;y) une solution de (E). Ce couple vérifie :

$221\,x-331\,y = 1 \;\Leftrightarrow\; 221\,x-331\,y = 221\times3-331\times2 \;\Leftrightarrow\; 221(x-3) = 331(y-2)$.

On en déduit que 331 divise $221(x-3)$. Or 221 et 331 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 331 divise $x-3$.

Il existe donc un entier k tel que $x-3 = 331\,k$, c'est-à-dire $x = 3+331\,k$.

En remplaçant $x-3$ par $331\,k$ dans l'équation , on obtient :

$221\times331\,k = 331(y-2)\Leftrightarrow y-2 = 221\,k \;\Leftrightarrow\; y = 2+221k$. Réciproquement, on vérifie que pour tout entier k, $221(3+331\,k)-331(2+221\,k) = 221\times3-331\times2 = 1$ donc le couple $(3+331\,k\,;2+221\,k)$ est solution de (E).

Par conséquent, l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'équation $221\,x-331\,y = 1$ sont les couples de la forme $(3+331\,k\,;2+221\,k)$, pour tout entier relatif k.

3) a) Comme $v_{n+1} = v_n + 331$, alors la suite (v_n) est la suite arithmétique de raison 331 et de premier terme $v_0 = 3$.

On en déduit que, pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 + 331n = 3 + 331n$.

b) $u_p = v_q \Leftrightarrow 2 + 221p = 3 + 331q \Leftrightarrow 221p - 331q = 1$.

D'après la question 2), on en déduit que $\begin{cases} p = 3 + 331k \\ q = 2 + 221k \end{cases}$ pour tout entier relatif k .

Or $0 \leq p \leq 500 \Leftrightarrow 0 \leq 3 + 331k \leq 500 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{331} \leq k \leq \dfrac{497}{331}$ ce qui amène à $k = 0$ ou $k = 1$.

Et $0 \leq q \leq 500 \Leftrightarrow 0 \leq 2 + 221k \leq 500 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{221} \leq k \leq \dfrac{498}{221}$ et on a $k = 0$, $k = 1$ ou $k = 2$.

Par conséquent, $k = 0$ ou $k = 1$.

Pour $k = 0$, On a $p = 3 + 331 \times 0 = 3$ et $q = 2 + 221 \times 0 = 2$.

Pour $k = 1$, On a $p = 3 + 331 \times 1 = 334$ et $q = 2 + 221 \times 1 = 223$.

Les couples d'entiers naturels tels que $u_p = v_q$, $0 \leq p \leq 500$ et $0 \leq q \leq 500$ sont : $(3;2)$ et $(334;223)$.