DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Suites et démonstration par récurrence	*Le 25 septembre 2014*

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (10 *points*)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n$.

1) a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2) a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a $u_n > \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3) *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times 0{,}5^n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b) En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0{,}5^n$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n < 0{,}01$.

Entrée	*n* et *u* sont des nombres
Initialisation	*n* prend la valeur 0 *u* prend la valeur 2
Traitement	Tant que ... (1) *n* prend la valeur ... (2) *u* prend la valeur ... (3) Fin Tant que
Sortie	Afficher *n*

<u>Exercice 2</u> (10 points)

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$.

Partie A

1) On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme No 1	**Algorithme No 2**	**Algorithme No 3**
Variables : v est un réel, i et n sont des entiers naturels		

Début de l'algorithme
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme
	Début de l'algorithme
	Lire n
	Pour i variant de 1 à n faire
	    v prend la valeur 1
	    Afficher v
	    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
	Fin pour
	Fin algorithme
		Début de l'algorithme
		Lire n
		v prend la valeur 1
		Pour i variant de 1 à n faire
		    Afficher v
		    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
		Fin pour
		Fin algorithme

2) Pour $n = 10$, on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B : Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

2) En déduire l'expression de (w_n), puis celle (v_n) de en fonction de n.

3) Déterminer la limite de la suite (v_n).