TS

corrigé du D.S. n°1

Exercice 1

1) a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b) Il semble que la suite soit décroissante à partir du rang 1.

2) a) Soit P_n la proposition : $u_n > \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$.

$u_1 = \frac{1}{5}\times 2+3\times 0{,}5^0 = 3{,}4$ et $\frac{15}{4}\times 0{,}5^1 = \frac{15}{8} = 1{,}875$ donc $u_1 > \frac{15}{4}\times 0{,}5^1$ et P_1 est vraie.

(Remarquons que P_0 n'est pas vraie)

Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $u_p > \frac{15}{4}\times 0{,}5^p$. $u_{p+1} = \frac{1}{5}u_p+3\times 0{,}5^p$ donc

$u_{p+1} > \frac{1}{5}\times\frac{15}{4}\times 0{,}5^p+3\times 0{,}5^p \Leftrightarrow u_{p+1} > (\frac{3}{4}+3)\times 0{,}5^p \Leftrightarrow u_{p+1} > \frac{15}{4}\times 0{,}5^p \Rightarrow u_{p+1} > \frac{15}{4}\times 0{,}5^{p+1}$

(car $0{,}5^{p+1} < 0{,}5^p$) donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout $n > 0$, $u_n > \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$.

b) $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{5}u_n+3\times 0{,}5^n-u_n = 3\times 0{,}5^n-\frac{4}{5}u_n = \frac{4}{5}(\frac{15}{4}\times 0{,}5^n-u_n)$. Or, pour n non nul, $u_n > \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$ donc $\frac{15}{4}\times 0{,}5^n-u_n < 0$ et donc $u_{n+1}-u_n \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 1 .

c) $u_n > \frac{15}{4}\times 0{,}5^n > 0$. Donc la suite (u_n) est minorée. (u_n) est donc une suite minorée et décroissante donc elle converge.

3) a) $v_{n+1} = u_{n+1}-10\times 0{,}5^{n+1} = \frac{1}{5}u_n+3\times 0{,}5^n-10\times 0{,}5^{n+1} = \frac{1}{5}u_n+3\times 0{,}5^n-5\times 0{,}5^n = \frac{1}{5}(u_n-10\times 0{,}5^n)$.

Or $v_n = u_n-10\times 0{,}5^n$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$ et (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = u_0-10\times 0{,}5^0 = -8$.

b) (v_n) est une suite géométrique de premier terme -8 et de raison $\frac{1}{5}$ donc $v_n = -8\times(\frac{1}{5})^n$. Par ailleurs, $v_n = u_n-10\times 0{,}5^n$ donc $u_n = v_n+10\times 0{,}5^n = -8\times(\frac{1}{5})^n+10\times 0{,}5^n$.

c) $\frac{1}{5}$ et $0{,}5$ appartiennent à l'intervalle $]0;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{5})^n = \lim\limits_{n\to+\infty}0{,}5^n = 0$ et par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = 0$

4) (1) Tant que $u > 0{,}01$

(2) n prend la valeur $n+1$

(3) u prend la valeur $\frac{1}{5}u+3\times 0{,}5^{n-1}$

Exercice 2

Partie A

1) L'algorithme qui convient est l'algorithme n°3. En effet, l'algorithme n°1 n'affiche que la dernière valeur v_n et l'algorithme n°2 n'affiche que des 1 puisque v est valorisé dans la boucle.

2) La suite semble croissante et converger vers 3.

3) a) Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;6[$ par $f(x)=\frac{9}{6-x}$. $f'(x)=\frac{-(-9)}{(6-x)^2}=\frac{9}{(6-x)^2}>0$ donc f est une fonction strictement croissante.

Soit P_n la proposition : $0 < v_n < 3$.

$v_0 = 1$ et donc $0 < v_0 < 3$ et P_0 est vraie.

Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $0 < v_p < 3$. f est une fonction strictement croissante donc $f(0) < f(v_p) < f(3) \Leftrightarrow 1{,}5 < v_{p+1} < 3$ et donc $0 < v_{p+1} < 3$ et la proposition est vraie au rang $p+1$.

On peut conclure que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0 < v_n < 3$.

b) $v_{n+1}-v_n=\frac{9}{6-v_n}-v_n=\frac{9-v_n(6-v_n)}{6-v_n}=\frac{v_n^2-6v_n+9}{6-v_n}=\frac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$. Or $(3-v_n)^2\geq 0$ et, $v_n<3$ donc $6-v_n>0$, donc $v_{n+1}-v_n\geq 0$. (v_n) est donc une suite croissante.

c) (v_n) est une suite croissante et majorée (par 3) donc (v_n) converge.

Partie B

1) $w_{n+1}-w_n=\frac{1}{v_{n+1}-3}-\frac{1}{v_n-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-v_n}-3}-\frac{1}{v_n-3}=\frac{6-v_n}{9-3(6-v_n)}-\frac{1}{v_n-3}=\frac{6-v_n}{3v_n-9}-\frac{3}{3v_n-9}$

$=\frac{3-v_n}{3v_n-9}=-\frac{1}{3}$

donc (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $w_0=-\frac{1}{2}$

2) (w_n) est une suite arithmétique donc $w_n=w_0+nr=-\frac{1}{2}-\frac{n}{3}$.

$w_n=\frac{1}{v_n-3} \Leftrightarrow v_n-3=\frac{1}{w_n} \Leftrightarrow v_n=\frac{1}{w_n}+3$ donc $v_n=\frac{1}{\frac{-1}{2}-\frac{n}{3}}+3=-\frac{6}{3+2n}+3$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+2n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3+2n}=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=3$