DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Nombres complexes et suites	*Le 17 octobre 2014*

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (10 *points*)

Toutes les questions suivantes sont indépendantes.

1) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = -\frac{2}{3}+\frac{3}{2}i-(-2+3i)$ c) $z_3 = (\sqrt{3}-5i)^2$

b) $z_2 = (2-15i)(\overline{-8+i})$ d) $z_4 = \frac{1-5i}{4-3i}$

2) Le nombre z s'écrit sous la forme algébrique $z = x+iy$ avec x et y deux réels.
Si $z \neq i$, on pose $Z = \frac{z+1}{z-i}$.
Déterminer la forme algébrique de Z en fonction de x et y.

3) On veut résoudre l'équation à coefficients réels (E) : $z^3-7z^2+19z-13 = 0$.
a) Vérifier que 1 est une solution de l'équation (E).
b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :
$$z^3-7z^2+19z-13 = (z-1)(z^2+az+b).$$
c) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation (E).

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique $1\,cm$.
Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre $[OP]$. On désigne par Ω le centre de Γ.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c où $a = 5+5i$, $b = 1+3i$ et $c = 8-4i$.
a) Placer les points dans le plan complexe.
b) Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ.
c) Soit D le point d'affixe $2+2i$. Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

Exercice 2 (4 *points*)

Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n+2n+2$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme No 1	**Algorithme No 2**
Début de l'algorithme Lire n u prend la valeur 0 Pour i variant de 1 à n faire u prend la valeur $u+2i+2$ Fin pour Afficher u Fin algorithme	Début de l'algorithme Lire n u prend la valeur 0 Pour i variant de 0 à $n-1$ faire u prend la valeur $u+2i+2$ Fin pour Afficher u Fin algorithme

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

4) On admettra que pour tout entier naturel n, $u_n = n^2+n$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

<u>Exercice 3</u> (6 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}.$$

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
b) Émettre une conjecture sur le sens de variation de cette suite (u_n).
c) Compéter l'algorithme suivant afin qu'il détermine la première valeur de N telle que $u_N > A$ où A est un réel donné.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Entrer la valeur de A"
  LIRE A
  n PREND_LA_VALEUR 0
  u PREND_LA_VALEUR 2
  TANT_QUE (.......................................................) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    u PREND_LA_VALEUR ..............................................................
    n PREND_LA_VALEUR ................................................................
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "La valeur de N est :"
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

d) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur affichée pour $A = 100$.
e) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq n+3$.
b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$.
c) En déduire une validation de la conjecture faite à la question 1) b).

3) On désigne par v_n la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
a) Démontrer que la suite v_n est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.
c) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n > n$.
Démontrer la conjecture formulée à la question 1) e).