TS

corrigé du D.S. n°2

Exercice 1

1) a) $z_1 = -\frac{2}{3}+\frac{3}{2}i-(-2+3i) = \frac{4}{3}-\frac{3}{2}i$.

b) $z_2 = (2-15i)(\overline{-8+i}) = (2-15i)(-8-i) = -16-2i+120i+15i^2 = -16-15+118i = -31+118i$.

c) $z_3 = (\sqrt{3}-5i)^2 = 3-10\sqrt{3}i+25i^2 = -22-10\sqrt{3}i$.

d) $z_4 = \frac{1-5i}{4-3i} = \frac{(1-5i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{4+15-20i+3i}{16+9} = \frac{19}{25}-\frac{17}{25}i$

2) $Z = \frac{z+1}{z-i} = \frac{x+iy+1}{x+iy-i} = \frac{x+1+iy}{x+i(y-1)} = \frac{(x+1+iy)(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))}$
$= \frac{x(x+1)+y(y-1)+i(xy-(x+1)(y-1))}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2+x-y}{x^2+y^2-2y+1}+i\frac{x-y+1}{x^2+y^2-2y+1}$

3) a) $1^3-7\times1^2+19\times1-13 = 1-7+19-13 = 0$ donc 1 est solution de l'équation (E) .

b) $(z-1)(z^2+az+b) = z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$. Par identification, il faut donc résoudre le système:

$\begin{cases} a-1 = -7 \\ b-a = 19 \\ -b = -13 \end{cases}$. Ce qui amène à $a = -6$ et $b = 13$. On a donc :

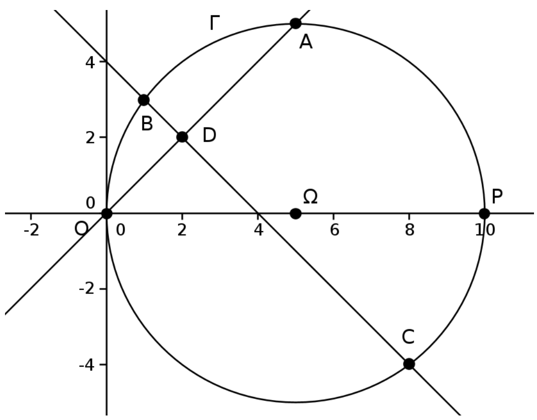
$z^3-7z^2+19z-13 = (z-1)(z^2-6z+13)$.

c) $(E) \Leftrightarrow (z-1)(z^2-6z+13) = 0 \Leftrightarrow z-1 = 0$ ou $z^2-6z+13 = 0$. $z-1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$ et pour

l'équation $z^2-6z+13 = 0$, $\Delta = -16$ puis $z_1 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$ et $z_2 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$ et donc

$S = \{1;3-2i;3+2i\}$

4) a) Voir ci-contre



b) On a $z_\Omega = \frac{z_O+z_P}{2} = 5$ puis $z_{\overrightarrow{\Omega A}} = z_A-z_\Omega = 5+5i-5 = 5i$

donc $\Omega A = 5$. De même $z_{\overrightarrow{\Omega B}} = 1+3i-5 = -4+3i$ donc

$\Omega B = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5$ et $z_{\overrightarrow{\Omega C}} = 8-4i-5 = 3-4i$ donc

$\Omega C = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$. Comme le diamètre de Γ est 5 , A ,

B et C appartiennent à Γ .

c) D'une part, $z_{\overrightarrow{DB}} = z_B-z_D = -1+i$ et

$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C-z_D = 6-6i = -6z_B$ donc $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et D est un point de (BC) . D'autre part, $z_{\overrightarrow{OD}} = z_D = 2+2i$ donc $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{OD} = 2\times(-1)+2\times1 = 0$ donc (OD) et (BD) sont perpendiculaires et D est bien le projeté orthogonal de O sur (BC) .

Exercice 2

1) $u_1 = u_0+2\times 0+2 = 0+2 = 2$

$u_2 = u_1+2\times 1+2 = 2+2+2 = 6$

2) L'algorithme qui convient est l'algorithme n°2. En effet, pour calculer u_1 il faut faire $u_0+2\times 0+2$ et il faut donc que la première valeur de i soit 0, ce qui n'est pas le cas pour l'algorithme n°1.

3) $u_{n+1}-u_n = u_n+2n+2-u_n = 2n+2 > 0$ car $n\in\mathbb{N}$. Donc (u_n) est strictement croissante.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3

1) a) $u_1 = \frac{2}{3}u_0+\frac{1}{3}\times 0+1 = \frac{4}{3}+1 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$; $u_2 = \frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}\times 1+1 = \frac{26}{9} \approx 2{,}89$;

$u_3 = \frac{2}{3}u_2+\frac{1}{3}\times 2+1 = \frac{97}{27} \approx 3{,}59$; $u_4 = \frac{2}{3}u_3+\frac{1}{3}\times 3+1 = \frac{356}{81} \approx 4{,}40$.

b) La suite (u_n) semble croissante.

c) Voir ci-contre

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Entrer la valeur de A"
  LIRE A
  n PREND_LA_VALEUR 0
  u PREND_LA_VALEUR 2
  TANT_QUE (u <= A) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    u PREND_LA_VALEUR 2/3*u+1/3*n+1
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "La valeur de N est :"
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

d) La valeur théorique donnée par la calculatrice devrait être 100 mais, du fait des approximations, la valeur renvoyée est 101.

e) La suite semble tendre vers $+\infty$.

2) a) Soit P_n la proposition : $u_n \leq n+3$.

$u_0 = 2$ donc P_0 est vraie.

Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $u_p \leq p+3$. $u_{p+1} = \frac{2}{3}u_p+\frac{1}{3}p+1$ donc $u_{p+1} \leq \frac{2}{3}(p+3)+\frac{1}{3}p+1 \Leftrightarrow u_{p+1} \leq p+3$ donc $u_{p+1} \leq p+1+3$ et la proposition est vraie au rang $p+1$.

On peut conclure que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq n+3$.

b) $u_{n+1}-u_n = \frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n = -\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}(n+3) = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$.

c) Pour tout n in $\mathbb{N}$, $u_n \leq n+3$ donc $n+3-u_n \geq 0$ et donc $u_{n+1}-u_n \geq 0$. La suite (u_n) est effectivement croissante.

3) a) $v_{n+1} = u_{n+1}-(n+1) = \frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1 = \frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n-n) = \frac{2}{3}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$. On a donc $v_n = v_0\times\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) $v_n = u_n-n$ donc $u_n = v_n+n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$.

c) Pour tout entier n , $\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$ donc $u_n > n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.