corrigé du D.S. n°3

Exercice 1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+1}{x^2-3x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{4}{1} = 4 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

Si $x<3$ alors $6-2x>0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} 6-2x = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} 4x+1 = 13$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \frac{4x+1}{6-2x} = +\infty$.

Pour tout x , $-1 \leq \cos x$ donc $2 \leq 3+\cos x$ et si x `<=` 0 , x^3 `<=` 0 donc $x^3(3+\cos x) \leq 2x^3$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3(3+\cos x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{9x^2-x} = \frac{1}{9}$ et $\lim\limits_{y\to\frac{1}{9}} \sqrt{y} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ (La fonction racine carrée est continue) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+4}{9x^2-x}} = \frac{1}{3}$.

Exercice 2

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{x^2(1-\frac{1}{x^3})} = 0$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

   donc l'axe des abscisses (d'équation $y=0$) est asymptote horizontale à C .

   La fonction cube est croissante donc si $x<1$ alors $x^3-1<0$ et si $x>1$ alors $x^3-1>0$ donc

   $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^3-1 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x^3-1 = 0^+$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} 2x+1 = 3$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$.

   La droite d'équation x `=` 1 est donc asymptote verticale à C.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc l'axe des abscisses (d'équation $y=0$) est asymptote horizontale à C .

   $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à C .

Partie B

1. $f'(x) = \frac{2(x^3-1)-3x^2(2x+1)}{(x^3-1)^2} = \frac{-4x^3-3x^2-2}{(x^3-1)^2}$.

2. a. $g'(x) = -12x^2 - 6x = -6x(2x+1)$ donc on a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

b. Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$, $g(x) \leq -2$. Donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle. Sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$, la fonction g est continue (c'est une fonction polynôme) et strictement décroissante, 0 appartient à l'intervalle image $\left[-\frac{9}{4};+\infty\right[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

c. $g(-1{,}136) \approx -0{,}0075 < 0$ et $g(-1{,}137) \approx 0{,}0012 > 0$ donc $\alpha \in \left]-1{,}136\ ;-1{,}137\right[$.

d. Le tableau de variations montre que sur $\left]-\infty;\alpha\right]$, $g(x) > 0$ et sur $\left]\alpha;+\infty\right]$, $g(x) < 0$.

3. $f'(x) = \dfrac{-4x^3 - 3x^2 - 2}{(x^3-1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x^3-1)^2}$ donc f' est du signe de g et on a :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\approx 0{,}52$	$\searrow$ $-\infty$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

Partie C

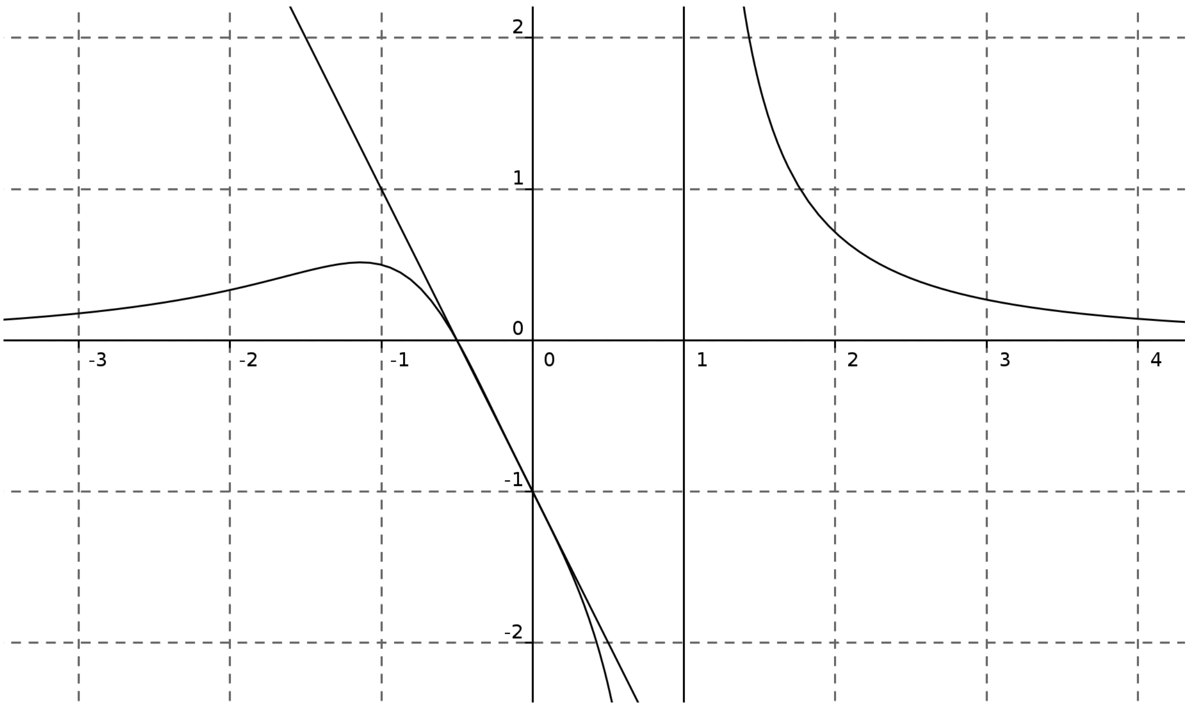
1. $f(0) = -1$ et $f'(0) = -2$ donc la tangente T a pour équation $y = -2x - 1$.

2. Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - (-2x-1) = \dfrac{2x+1}{x^3-1} + 2x + 1 = \dfrac{x^3(2x+1)}{x^3-1}$. On a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$\dfrac{x^3(2x+1)}{x^3-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Donc C est en-dessous de T sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[0\ ;1\right[$ et au dessus sur $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ et sur $\left]1;+\infty\right[$.

Partie D



Exercice 3

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ donc on a :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$-\infty$

La fonction f est continue (polynôme) sur $\mathbb{R}$ et monotone sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$, $[0;2]$ et $[2;+\infty[$. De plus, 0 appartient à l'image des 3 intervalles précédents, donc l'équation $f(x) = 0$ a exactement trois solution dans $\mathbb{R}$ et donc Hélène à tord.

2. Il manque la ligne : « x1 prend la valeur x2 » pour que l'algorithme fonctionne correctement.

```
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  x1 PREND_LA_VALEUR -10
  x2 PREND_LA_VALEUR -10
  TANT_QUE (x2 < 10) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    x2 PREND_LA_VALEUR x2 + 0.1
    SI (F1(x1)*F1(x2) <= 0) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "Il y a une solution entre "
      AFFICHER x1
      AFFICHER " et "
      AFFICHER x2
      FIN_SI
    x1 PREND_LA_VALEUR x2
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 4

Dans cet exercice, on note C l'événement : « Le produit est une copie » et P l'événement : « Le test est positif ».

1. a. Il y a $99{,}5\ \%$ de produits originaux sur le marché donc $p(\bar{C}) = \dfrac{99{,}5}{100} = 0{,}995$.

   b. On cherche $p_{\bar{C}}(P)$. On sait que $p_{\bar{C}}(\bar{P}) = 0{,}95$ donc $p_{\bar{C}}(P) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

2. a. $p(C \cap P) = p(C) \times p_C(P) = 0{,}005 \times 0{,}85 = 0{,}00425$.

   b. $p(\bar{C} \cap P) = p(\bar{C}) \times p_{\bar{C}}(P) = 0{,}995 \times 0{,}05 = 0{,}04975$.

   c. $p(P) = p(\bar{C} \cap P) + p(C \cap P) = 0{,}00425 + 0{,}04975 = 0{,}054$.

   d. $p_P(\bar{C}) = p\dfrac{(P \cap \bar{C})}{p(P)} = \dfrac{0{,}04975}{0{,}054} \approx 0{,}921$.

   On remarque que le test « attrape » un original plus de neuf fois sur dix. C'est du à la faible proportion de copies en circulation.