DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Fonction exponentielle	*Le 16 janvier 2015*

Exercice 1 (3 *points*)

Démonstration des résultats de cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

Prérequis : On admettra que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
3. En faisant un changement de variable astucieux, démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

Exercice 2 (3 *points*)

On justifiera chaque étape des résolutions suivantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
   a) $e^{x^2-5} = e^{-4x}$ b) $e^{x+1} \times e^{3x+5} = 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{7-3x^2} > e^{2-2x}$

Exercice 3 (3 *points*)

Limites – Forme indéterminée

Déterminer les limites suivantes en mettant en évidence les limites de référence utilisées.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 x e^{-x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) e^x$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-e^x}{2x}$

Exercice 4 (3 *points*)

Dérivées

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f , g , et h suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-2x}}$ b) $g(x) = x+1-3 x e^{-x^2}$ c) $h(x) = \dfrac{3 e^x}{e^x - 2}$

Exercice 4 (8 *points*)
Exercice bac
On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 - e^{-x}$. Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement C_f et C_g, sont fournies en annexe à rendre avec la copie.

Partie A
Les courbes semblent avoir deux tangentes communes. Tracer au mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B
Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note D l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et à la courbe C_g au point B d'abscisse b.

1. a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A.
   a) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B.
   c) En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation $2(x-1)e^x+1 = 0$.

Partie C
On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2(x-1)e^x+1$.

1. a) Déterminer les limites de la fonction φ en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) Calculer la dérivée de la fonction φ puis étudier son signe.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   b) On note α la solution négative de l'équation et β la solution positive de cette équation.
   Donner une valeur approchée de $\varphi(-2)$ et $\varphi(1)$.
   À l'aide de l'algorithme par dichotomie, donner un encadrement de α et β d'amplitude 10^{-3}. On donnera le nombre de boucles nécessaires pour obtenir ces encadrements.

Annexe