Corrigé du D.S. n°5

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x-x$.
   Or pour tout x, $e^x>x$ donc $f'(x)>0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. De plus, $f(0)=e^0-\frac{0^2}{2}=1$. Par conséquent, pour tout réel x de $[0;+\infty[$, f(x) `≤=`1, et par suite, $e^x\geq\frac{x^2}{2}+1$, ou encore $e^x>\frac{x^2}{2}$.

   Si x est un réel strictement positif, on peut en conclure que $\frac{e^x}{x}>\frac{x}{2}$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$, d'après le théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

3. On peut remarquer que $x\,e^x=-(-x)e^{-(-x)}=-\frac{-x}{e^{-x}}$.

   Or $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$,en appliquant le théorème sur la limite d'une fonction composée, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{-x}=+\infty$. Par quotient de limites, on conclut que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{e^{-x}}=0$, et ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}x\,e^x=0$.

Exercice 2

1. a) $e^{x^2-5}=e^{-4x}\iff x^2-5=-4x\iff x^2+4x-5=0$.

   Calculons Δ : $\Delta=4^2-4\times1\times(-5)=36$.

   Comme $\Delta>0$, le trinôme x^2+4x-5 a deux racines :

   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-\sqrt{36}}{2}=-5 \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+\sqrt{36}}{2}=1.$$

   L'ensemble des solutions de l'équation $e^{x^2-5}=e^{-4x}$ est : $S=\{-5\ ;1\}$.

   b) $e^{x+1}\times e^{3x+5}=1\iff e^{x+1+3x+5}=e^0\iff e^{4x+6}=e^0\iff 4x+6=0\iff x=-\frac{3}{2}$.

   L'ensemble des solutions de l'équation $e^{x+1}\times e^{3x+5}=1$ est : $S=\{-1{,}5\}$.

2. $e^{7-3x^2}>e^{2-2x}\iff 7-3x^2>2-2x\iff -3x^2+2x+5>0$.

   Calculons Δ : $\Delta=2^2-4\times(-3)\times5=64$.

   Comme $\Delta>0$, le trinôme $-3x^2+2x+5$ a deux racines :

   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{64}}{(-6)}=\frac{5}{3} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{64}}{(-6)}=-1.$$

   D'où le trinôme $-3x^2+2x+5$ est négatif à « l'extérieur » de ses racines et positif à

« l'intérieur » de ses racines.

L'ensemble des solutions de l'équation $e^{7-3x^2} > e^{2-2x}$ est $\left]-1\ ;\frac{5}{3}\right[$.

Exercice 3

1. $3xe^{-x} = 3\times\frac{x}{e^x}$. Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$; d'où $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ (la fonction exponentielle « l'emporte » sur la fonction $x \to x$ au voisinage de $+\infty$).

   Donc $\lim_{x\to+\infty} 3xe^{-x} = 0$ (par produit de limites).

2. $(x+1)e^x = xe^x + e^x$. Or $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, d'où $\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x = 0$ (par somme de limites).

3. $\frac{1-e^x}{2x} = -\frac{1}{2}\times\frac{e^x-1}{x}$. Or $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$, d'où $\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{2x} = -\frac{1}{2}$ (par produit de limites).

Exercice 4

a) On a $f = \frac{3}{1+e^u}$ avec $u(x) = -2x$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et $f' = -\frac{3u'e^u}{(1+e^u)^2}$ où $u'(x) = -2$.

Donc, pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{3\times(-2)e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{6e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$.

b) On a $g = u - ve^w$ avec $u(x) = x+1$, $v(x) = 3x$ et $w(x) = -x^2$. La fonction w est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc e^w est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par suite, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = u' - (v'e^w + vw'e^w)$ où $u'(x) = 1$, $v'(x) = 3$ et $w'(x) = -2x$.

Donc pour tout réel x, $g'(x) = 1-(3e^{-x^2}+3x(-2x)e^{-x^2}) = 1-(3-6x^2)e^{-x^2}$.

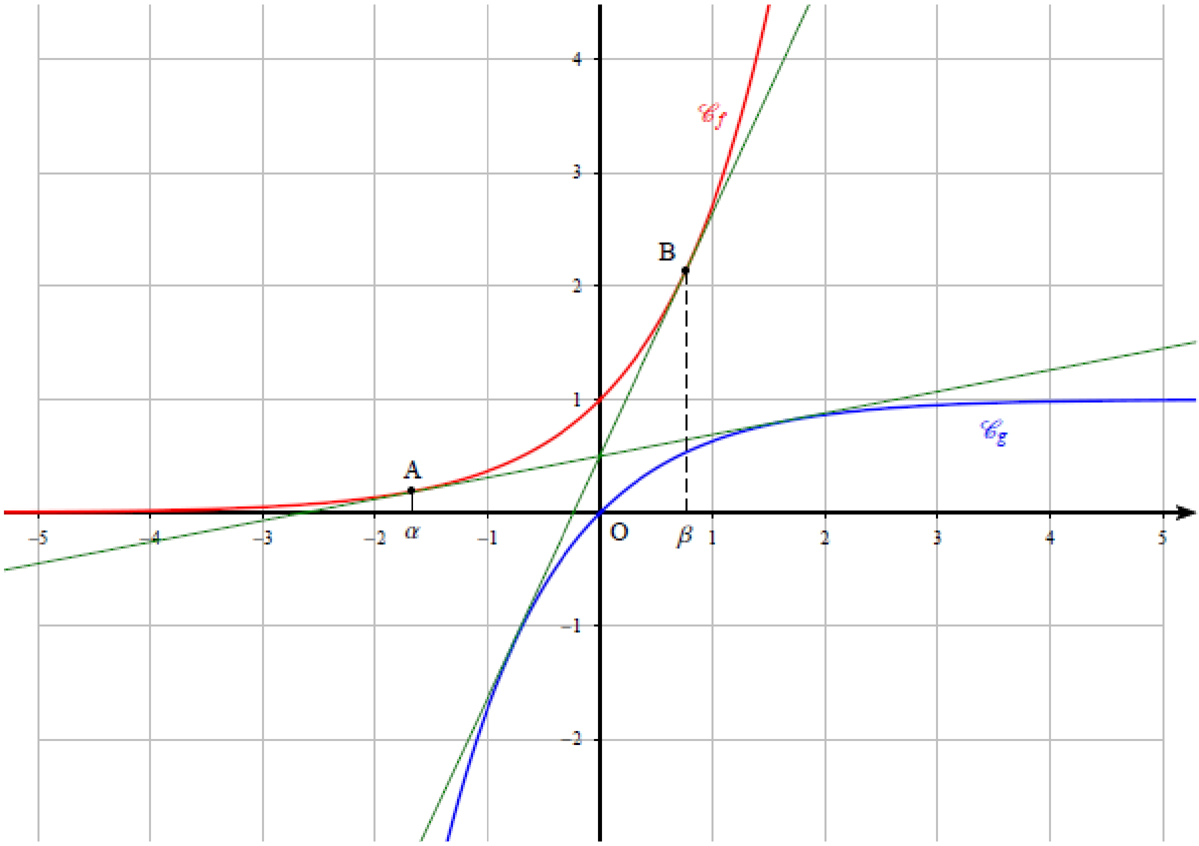
c) On a $h = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3e^x$ et $v(x) = e^x - 2$.

$h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ où $u'(x) = 3e^x$ et $v'(x) = e^x$.

Donc, $h'(x) = \frac{3e^x(e^x-2)-3e^xe^x}{(e^x-2)^2} = \frac{-6e^x}{(e^x-2)^2}$.

Exercice 5

Partie A



Partie B

1. a) Soit m le coefficient directeur de D, tangente en A à C_f ; alors $m = f'(a) = e^a$.

   b) Soit m' le coefficient directeur de D, tangente en B à C_g ; alors $m' = g'(b)$.

   Or g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $g'(x) = 0-(-1)e^{-x} = e^{-x}$. Donc $m' = e^{-b}$.

   c) Comme les deux tangentes sont communes, alors leurs coefficients directeurs sont égaux ; par suite, $e^a = e^{-b} \Leftrightarrow a = -b$.

2. L'équation de la tangente en A à C_f est : $y = f'(a)(x-a)+f(a) = e^a(x-a)+e^a$ **(1)**.

   L'équation de la tangente en B à C_g est : $y = g'(b)(x-b)+g(b) = e^{-b}(x-b)+1-e^{-b}$.

   Comme $e^a = e^{-b}$ et $b = -a$, alors L'équation de la tangente en B à C_g est :

   $y = e^a(x+a)+1-e^a$ **(2)**.

   De **(1)** et **(2)**, on en déduit que $e^a(x-a) = e^a(x+a)+1-e^a$.

   Or $e^a(x-a) = e^a(x+a)+1-e^a \Leftrightarrow 2(a-1)e^a+1 = 0$.

   Par conséquent, le réel a est solution de l'équation

   $e^a(x-a) = e^a(x+a)+1-e^a \Leftrightarrow 2(a-1)e^a+1 = 0$.

Partie C

1. a) ● $\lim\limits_{x \to +\infty} 2(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} 2(x-1)e^x = +\infty$ (par produit de limites). Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ (par somme de limites).

   ● $\varphi(x) = 2\,x\,e^x - 2e^x + 1$.

   Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; d'où, $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 1$ (par produit et somme de limites).

   b) On a $\varphi = u\,v + 1$ avec $u(x)$è$= 2(x-1)$ et $v(x) = e^x$.

   φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors

   $\varphi' = u'v + u\,v' + 0$ avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = e^x$.

   Donc, pour tout réel x , $\varphi'(x) = 2\,e^x + 2(x-1)e^x = 2\,x\,e^x$.

   Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , alors le signe de $\varphi'(x)$ dépend de celui de $2\,x$.

   On en déduit que :

   - si $x < 0$, $\varphi(x) < 0$
   - si $x = 0$, $\varphi(x) = 0$
   - si $x > 0$, $\varphi(x) > 0$

   c) D'après la question précédente, on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ	1	↘	-1	↗	$+\infty$

   $\varphi(0) = 2(0-1)e^0 = -1$

2. a) D'après le tableau de variations précédent, φ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, et $0 \in \varphi(]-\infty\,;0])$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty\,;0]$.

   La fonction φ est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $0 \in \varphi([0\,;+\infty[)$. Donc, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β sur $[0\,;+\infty[$.

   Par conséquent, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions solutions α et β dans $\mathbb{R}$.

   b) $\varphi(-2) = 2(2-1)\,e^2 + 1 \approx 0{,}2$. De plus, $\varphi(0) = -1$. On en déduit que $-2 < \alpha < 0$.

   $\varphi(1) = 2(1-1)\,e^1 + 1 = 1$. De plus, $\varphi(0) = -1$. On en déduit que $0 < \beta < 1$ .En utilisant l'algorithme par dichotomie, on obtient :

   - ● $-1{,}679 < \alpha < -1{,}678$ en 11 boucles
   - ● $0{,}768 < \beta < 0{,}769$ en 10 boucles