

DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

*Nombres complexes et fonction logarithme
népérien*

Le 6 février 2015

**Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.**

Exercice 1 (9 points)

Toutes les questions suivantes sont indépendantes.

1. Simplifier :

$$A = \ln 3 + \ln \frac{1}{3} \quad ; \quad B = \ln \frac{1}{16} \quad ; \quad C = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2} .$$

2. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:

$$\ln 50 \quad ; \quad \ln \frac{16}{25} \quad ; \quad \ln 250 .$$

3. Démontrer que $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$.

4. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue n entier naturel :

$$\text{a) } 2^n \leq 100 \quad ; \quad \text{b) } \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2} .$$

5. Résoudre les équations suivantes en précisant auparavant leur ensemble de validité :

$$\text{a) } 2 \ln x = \ln(x+4) + \ln(2x) \quad ; \quad \text{b) } e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 .$$

6. Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \quad ; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \frac{\ln x}{x}\right) \quad ; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) .$$

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $] -3; 4[$ par $f(x) = \frac{4-x}{x+3}$.

Dresser le tableau de variations, complet, de la fonction f .

Exercice 3 (2 points)

On considère le nombre complexe $a = (-\sqrt{3}+i)^{2013}$.

- Déterminer la forme exponentielle de $-\sqrt{3}+i$.
- Montrer que a est un imaginaire pur.

Exercice 4 (5 points)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = (1+i)z_n$.

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

- Calculer u_0 .
- Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
- Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n \geq p$.
Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	u est un réel, p est un réel, n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p
Traitement	???
Sortie	???

Partie B

- Déterminer la forme algébrique de z_1 .
- Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+i$.
 - En déduire la forme exponentielle de z_1 .
- Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.