Corrigé du D.S. n°6

Exercice 1

1. $A = \ln 3 + \ln\frac{1}{3} = \ln 3 - \ln 3 = 0$. $B = \ln\frac{1}{16} = \ln 2^{-4} = -4\ln 2$.

   $C = \frac{1}{2}\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{4}\ln 2$.

2. $\ln 50 = \ln(2\times 5^2) = \ln 2 + 2\ln 5$. $\ln\frac{16}{25} = \ln\frac{2^4}{5^2} = 4\ln 2 - 2\ln 5$.

   $\ln 250 = \ln(2\times 5^5) = \ln 2 + 3\ln 5$.

3. $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = \ln((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})) = \ln(2^2 - \sqrt{3}^2) = \ln 1 = 0$.

4. a) 2^n et 100 sont strictement positifs donc

   $2^n \leq 100 \Leftrightarrow \ln 2^n \leq \ln 100 \Leftrightarrow n\ln 2 \leq \ln 100 \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln 100}{\ln 2}$.

   On a $\frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 6{,}64$ et n est entier donc on obtient $n \leq 6$.

   b) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \ln 10^{-2} \Leftrightarrow -n\ln 3 \leq -2\ln 10 \Leftrightarrow n \geq \frac{2\ln 10}{\ln 3} \Leftrightarrow n \geq 5$

5. a) l'écriture $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$ n'a de sens que pour $x > 0$, $x+4 > 0$ et $2x > 0$ ce qui revient à $x > 0$.

   $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x) \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln((x+4)(2x)) \Leftrightarrow x^2 = (x+4)(2x) \Leftrightarrow x^2 + 8x = 0$
   $\Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -8$

   Ces deux valeurs ne vérifient pas la condition $x > 0$ donc l'équation n'a pas de solution.

   b) L'écriture $e^{2x} - 5e^x + 4$ un un sens pour tout réel x .

   $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 4 = 0$. Posons $X = e^x$, on obtient $X^2 - 5X + 4 = 0$.

   Pour ce trinôme, on a $\Delta = 9$ puis $X_1 = 1$ et $X_2 = 4$. On doit donc résoudre les équations $e^x = 1$ et $e^x = 4$ qui ont pour solutions respectives $\ln 1 = 0$ et $\ln 4$. donc $S = \{0\ ;\ln 4\}$.

6. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - \frac{\ln x}{x})$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln x) = +\infty$, par somme et produit de limites.

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + 1 + \frac{\ln x}{x}) = +\infty$, par somme de limites.

   c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x} + \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(1 - x\ln x)$. Or, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$ (ici $x > 0$) et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc ,

   $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x} + \ln x) = +\infty$, par somme et produit de limites.

Exercice 2

On a $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x > -3}}(x+3) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to -3}(4-x) = 7$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x > -3}}(\frac{4-x}{x+3}) = +\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{X\to+\infty}(\ln X) = +\infty$ donc, par composée, $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = +\infty$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} (x+3)=0$ et $\lim\limits_{x\to 4}(x+3)=7$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \left(\frac{4-x}{x+3}\right)=0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{X\to 0}(\ln X)=-\infty$ donc, par composée, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=-\infty$.

$f=\ln(u)$ où u est une fonction rationnelle donc dérivable et positive sur $]-3;4[$ donc f est dérivable sur $]-3;4[$ et $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$. $u'(x)=\frac{-1(x+3)-1(4-x)}{(x+3)^2}=\frac{-7}{(x+3)^2}$ donc

$f'(x)=\frac{\frac{-7}{(x+3)^2}}{\frac{4-x}{x+3}}=\frac{-7}{(x+3)(4-x)}$. Sur $]-3;4[$, $3+x>0$ et $4-x>0$ donc $f'(x)<0$ et f est strictement décroissante sur $]-3;4[$. On a donc :

x	-3	4
f	$+\infty$	$-\infty$

Exercice 3

1. $|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{3^2+1^2}=2$ puis $-\sqrt{3}+i=2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2e^{\frac{5i\pi}{6}}$
2. $a=\left(2e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)^{2013}=2^{2013}e^{\frac{5\times 2013 i\pi}{6}}=2^{2013}e^{\frac{3355i\pi}{2}}=2^{2013}e^{\frac{-i\pi}{2}+839\times 2\pi}=2^{2013}e^{\frac{-i\pi}{2}}$.

   Donc $arg(a)=arg\left(2^{2013}e^{\frac{-i\pi}{2}}\right)=arg\left(e^{\frac{-i\pi}{2}}\right)=-\frac{\pi}{2}(2\pi)$ donc a est imaginaire pur.

Exercice 4

Partie A

1. $u_0=|z_0|=|\sqrt{3}-i|=\sqrt{3^2+1^2}=2$.
2. $u_{n+1}=|z_{n+1}|=|(1+i)z_n|=|1+i|\times|z_n|=\sqrt{1^2+1^2}u_n=\sqrt{2}u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0=2$.
3. $u_n=u_0\times q^n=2(\sqrt{2})^n$.
4. $\sqrt{2}>1$ et $2>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 2(\sqrt{2})^n=+\infty$.
5.

Variables	u est un réel, p est un réel, n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p

Traitement	Tant que $u<p$
	   Affecter à u la valeur $\sqrt{2}\times u$
	   Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

Partie B

1. $z_1 = (1+i)z_0 = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i$

2. a) $z_0 = \sqrt{3}-i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i) = 2(\cos(\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{-\pi}{6})) = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}$

   et $1+i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.

   b) $z_1 = (1+i)z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\times 2e^{-\frac{i\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}-\frac{i\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}$

3. $z_1 = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}$ donc $|z_1| = 2\sqrt{2}$ et $arg(z_1) = \frac{\pi}{12}(2\pi)$. Par suite,

   $z_1 = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ et donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$