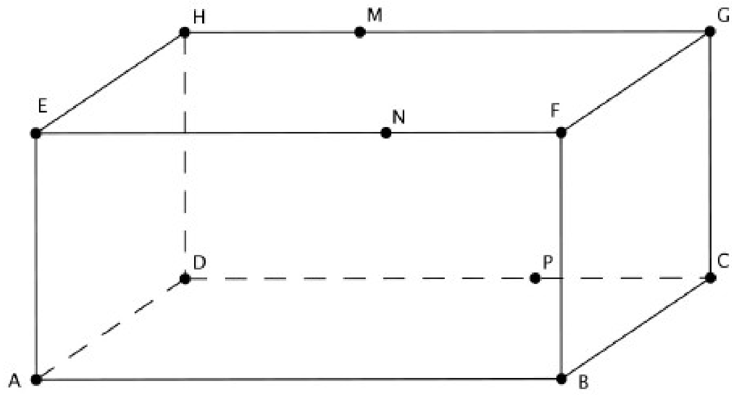
DEVOIR SURVEILLÉ N° 7	
Intégration et géométrie dans l'espace	*Le 25 mars 2015*

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (6 *points*)

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
M, N et P sont définis par $\overrightarrow{HM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$; $\overrightarrow{FN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

Pour chaque affirmation, cocher la bonne réponse.
Une réponse juste rapporte un point et une fausse retire 0,5 point.

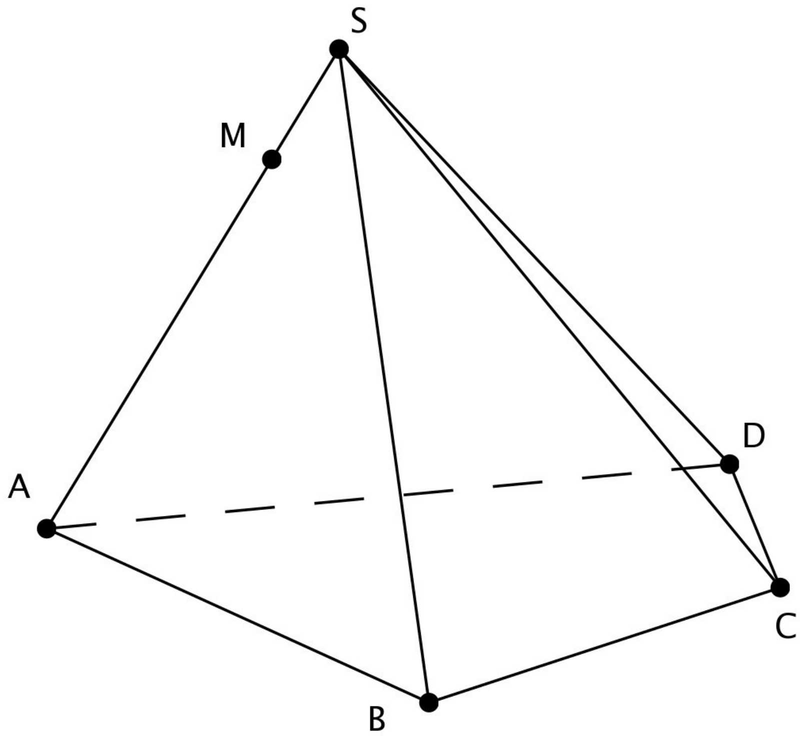


	VRAI	FAUX
Les points A, E, G et F sont coplanaires.		
Les droites (HB) et (NP) sont parallèles.		
Les droites (FD) et (NC) sont sécantes.		
Les plans (HNB) et (PMF) sont parallèles.		
Les droites (HC) et (FB) sont sécantes.		
Les plans (AMF) et (DGB) sont sécants.		

Exercice 2 (6 *points*)

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un quadrilatère quelconque. M est un point du segment $[SA]$. Les constructions seront effectuées sur la figure ci-dessous.

1. Justifier que les droites (AB) et (CD) sont sécantes, puis construire en justifiant la droite d_1, intersection des plans (SAB) et (SDC).
2. Construire en justifiant la droite d_2, intersection des plans (SAD) et (SBC).
3. a) Justifier que les droites d_1 et d_2 définissent un plan que l'on note $\mathcal{P}$.
   b) On appelle $\mathcal{P}'$ le plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par M.
   Construire l'intersection du plan $\mathcal{P}'$ avec les plans (SAB), (SBC), (SDC) et (SAD).
   c) On appelle N, P et Q les intersections respectives de $\mathcal{P}'$ avec (SB), (SC) et (SD).
   Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$? Justifier la réponse.



Exercice 3 (4 points)

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes sur l'intervalle I indiqué. On indiquera clairement la forme utilisée pour trouver cette primitive.

1) $f(x) = \dfrac{4}{(3x-1)^2}$; $I = \left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; $I =]0;+\infty[$.

3) $f(x) = e^{1-2x}$; $I = \mathbb{R}$.

4) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$; $I =]1;+\infty[$.

Exercice 4 (4,5 points)

Calculer les intégrales suivantes en justifiant.

$A = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t \, dt$ $\qquad B = \int_0^{10} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$ $\qquad C = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t \times \sin t \, dt$

Exercice 5 (2,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+x-2$.

Déterminer les réels dont l'image par f est égale à la valeur moyenne de f sur $[0;2]$.

Exercice 6 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout réel x strictement supérieur à 1, on ait : $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}$.
2. Déterminer alors une primitive F de f sur $]1\,;+\infty[$.
3. En déduire alors $I=\int_2^3 f(x)\,dx$. On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$.

Exercice 7 (6 points)

Soient $I_0=\int_0^1 e^{1-x}\,dx$, et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

1. Calculer I_0.
2. Donner une interprétation graphique du nombre I_0. On fera un graphique pour faire apparaître I_0.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, $I_{n+1}=(n+1)I_n+1$.
   Calculer I_1 et I_2.
4. On donne le programme suivant :

```
Variables
N, X
Initialisation
0 → N
e − 1 → X
Traitement
Tant que N < 10 faire
   (N + 1)X − 1 → X
   N + 1 → N
FinTantque
Afficher X
```

a) Que calcule ce programme ?
b) Donner la valeur approchée à 10^{-3} près de la valeur de sortie de ce programme.
c) Quelle conjecture peut-on faire ?

5. a) Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité : $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$.
   b) En déduire un encadrement de I_n.
   c) La suite (I_n) est-elle convergente ?