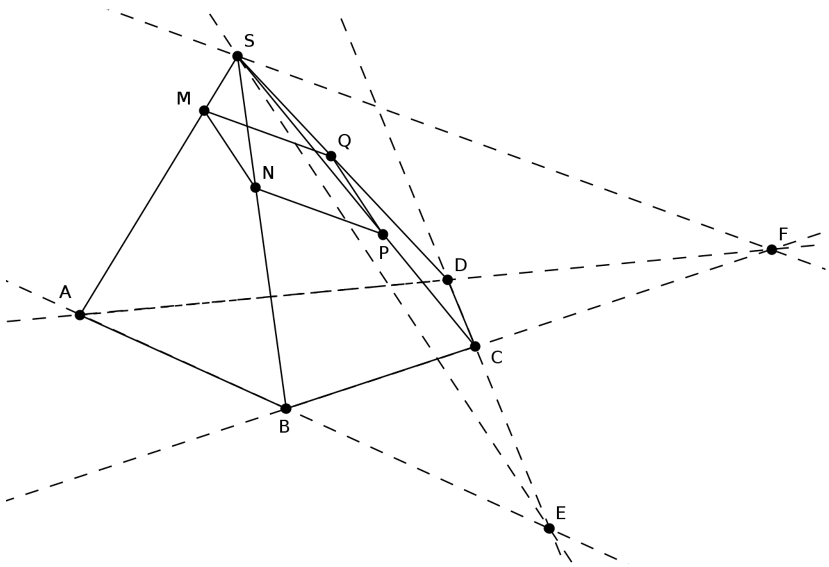
Corrigé du D.S. n°7

Exercice 1

	VRAI	FAUX
Les points A , E , G et F sont coplanaires.		X
Les droites (HB) et (NP) sont parallèles.		X
Les droites (FD) et (NC) sont sécantes.	X	
Les plans (HNB) et (PMF) sont parallèles.	X	
Les droites (HC) et (FB) sont sécantes.		X
Les plans (AMF) et (DGB) sont sécants.	X	

Exercice 2

1. Les droites (AB) et (CD) sont dans le plan de de la base $ABCD$ de la pyramide donc elles sont coplanaires. Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes. Soit E le point d'intersection de (AB) et (CD), $E\in(SAB)$ et $E\in(SCD)$ donc $E\in(SAB)\cap(SCD)$. Par ailleurs, $S\in(SAB)\cap(SCD)$ donc $(SE)\subset(SAB)\cap(SCD)$. Comme les plans (SAB) et (SDC) ne sont pas confondus (sinon la figure serait plate) leur intersection est une droite et c'est donc (SE).
2. De même, en posant $F=(AD)\cap(BC)$, on obtient $(SF)=(SAD)\cap(SBC)$.
3. a) d_1 et d_2 sont sécantes en S donc elles définissent un plan.
   b) Voir figure (On n'a construit que les segments pour ne pas alourdir la figure).
   c) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans parallèles donc leurs intersections respectives avec le plan (SAB) sont deux droites parallèles. Ceci revient à dire que (MN) et d_1 sont parallèles. Avec le plan (SDC) on montre que (PQ) et d_1 sont parallèles. Donc (MN) et (PQ) sont parallèles. En utilisant les plan (SAD) et (SBC), on trouve de même que (NP) et (MQ) sont parallèles, $MNPQ$ est ainsi un parallélogramme.



Exercice 3

1. $f(x) = \frac{4}{(3x-1)^2} = -\frac{4}{3}\times\frac{-3}{(3x+1)^2} = -\frac{4}{3}\times\frac{-u'(x)}{u(x)^2}$ Avec $u(x) = 3x-1$. Donc la fonction

   F telle que $F(x) = -\frac{4}{3}\times\frac{1}{u(x)} = -\frac{4}{3(3x-1)}$ est une primitive de f sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

2. $f(x) = \frac{(\ln x)}{x} = \frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln x = \frac{1}{2}\times 2\times u'(x)\times u(x)$ Avec $u(x) = \ln x$. Donc la fonction

   F telle que $F(x) = \frac{1}{2}u(x)^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

3. $f(x) = e^{1-2x} = -\frac{1}{2}\times(-2)\times e^{1-2x} = -\frac{1}{2}\times u'(x)\times e^{u(x)}$ Avec $u(x) = 1-2x$. Donc la

   fonction F telle que $F(x) = -\frac{1}{2}e^{u(x)} = -\frac{1}{2}e^{1-2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4. $f(x) = \frac{3x}{x^2-1} = \frac{3}{2}\times\frac{2x}{x^2-1} = \frac{3}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)} =$ Avec $u(x) = x^2-1$. On a $x^2-1>0$ sur

   $]1;+\infty[$ Donc la fonction F telle que $F(x) = \frac{3}{2}\ln(u(x)) = \frac{3}{2}\ln(x^2-1)$ est une primitive

   de f sur $]1;+\infty[$.

Exercice 4

$A = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\, dt = [\sin t]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \sin(\frac{\pi}{3}) - \sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - (\frac{-\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$.

Posons $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{2}{3}\times\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} = \frac{2}{3}\times\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, donc $F(x) = \frac{2}{3}\times\sqrt{u(x)} = \frac{2}{3}\times\sqrt{x^3+1}$ est une primitive de f et on a : $B = \int_0^{10}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx = \left[\frac{2}{3}\times\sqrt{x^3+1}\right]_0^{10} = \frac{2}{3}(\sqrt{1001}-1)$.

Posons $f(t) = \cos t\sin t = \frac{1}{2}\times 2\cos t\sin t = \frac{1}{2}\times 2u'(t)u(t)$, donc $F(x) = \frac{1}{2}u(t)^2 = \frac{1}{2}\sin^2 t$ est une primitive de f et on a :

$C = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\times\sin t\, dt = \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(\sin^2(\frac{\pi}{3}) - \sin^2(\frac{-\pi}{3})) = \frac{1}{2}((\frac{\sqrt{3}}{2}) - (\frac{-\sqrt{3}}{2})^2) = 0$.

Exercice 5

La valeur moyenne de f sur $[0;2]$ est

$\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2+t-2\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-2t\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-4-0) = \frac{1}{3}$.

On doit donc résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2+x-2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2+x-\frac{7}{3} = 0$.

Pour cette équation du 2nd degré, $\Delta = 1+\frac{28}{3} = \frac{31}{3}$ puis $x_1 = \frac{-1-\sqrt{\frac{31}{3}}}{2} \approx -2{,}11$ et

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{\frac{31}{3}}}{2} \approx 1{,}11$ qui sont donc les valeurs cherchées.

Exercice 6

1. $$\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}=\frac{a(x+1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}+\frac{bx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}+\frac{cx(x+1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x^2-1)}$$

   Par identification on obtient le système $\begin{cases} a+b+c=0 \\ c-b=0 \\ -a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ a=-1 \end{cases}$ et on a donc

   $$f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}$$

2. $f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}+\frac{1}{2}\frac{v'(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=x+1>0$ et $v(x)=x-1>0$ car $x\in]1\ ;+\infty[$

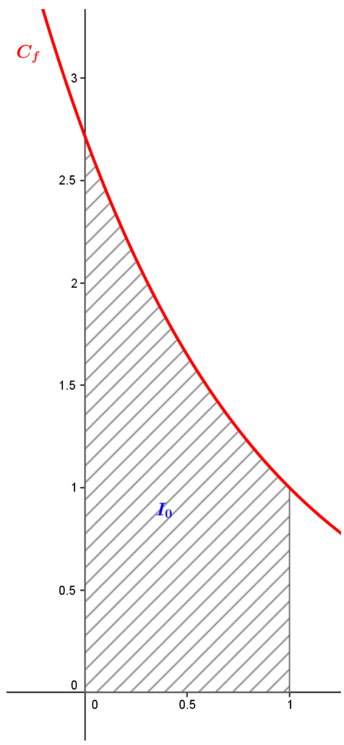
   . Donc $F(x)=-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)$ est une primitive de f .

3. $$I=\int_2^3 f(x)dx=[F(x)]_2^3=\left[-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)\right]_2^3=$$

   $$-\ln 3+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2-(-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 1)=-\frac{3}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\times 2\ln 2+\frac{3}{2}\ln 2=-\frac{3}{2}\ln 3+\frac{5}{2}\ln 2$$

Exercice 7

1. $I_0=\int_0^1 e^{1-x}dx=\left[-e^{1-x}\right]_0^1=-e^0-(-e^1)=e-1$.
2. I_0 est l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, la courbe d'équation $y=e^{1-x}$ et l'axe des abscisses.



3. $I_1=I_{0+1}=(0+1)I_0-1=I_0-1=e-1-1=e-2$ Et
   $I_2=I_{1+1}=(1+1)I_1-1=2I_1-1=2(e-2)-1=2e-5$

4. a) Le programme calcule I_{10} .
   b) $I_{10} \approx 0{,}099$.
   c) Il semble que la suite (I_n) converge vers 0 .
5. a) $0 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le 1-x \le 1 \;\Rightarrow\; e^0 \le e^{1-x} \le e^1 \;\Leftrightarrow\; 1 \le e^{1-x} \le e$ or $x \in [0\,;1]$ donc $x^n \ge 0$ donc $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$.
   b) $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$ donc $\int_0^1 x^n\,dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \le \int_0^1 x^n e\,dx \;\Leftrightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \le I_n \le e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$
   et on a $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$.
   c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.