DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Géométrie vectorielle et lois à densité	Le 17 avril 2015

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (10 *points*)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1;1;6)$, $B(-1;2;3)$, $C(-6;5;-4)$ et la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 4+2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie 1

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre choix.

1. Le point C est un point de (d).
2. Le vecteur $\vec{v}(-2;2;-4)$ est un vecteur directeur de (d).
3. La droite (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1-u \\ y = 4+u \\ z = -2u \end{cases}$ $(u \in \mathbb{R})$ est confondue avec la droite (d).
4. Il existe un point de (d) qui appartient au plan $(O; \vec{i}; \vec{k})$.
   (*Indication* : un point $M(x;y;z)$ appartient au plan $(O; \vec{i}; \vec{k})$ si et seulement si $y = 0$)

Partie 2

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
2. Montrer que les droites (BC) et (d) sont sécantes en un point D dont on déterminera les coordonnées.
3. Montrer que le point $E(1;2;4)$ est un point de (d) qui n'appartient pas au plan (ABC).
   Que pouvez-vous conclure sur la position de la droite (d) par rapport au plan (ABC) ?

Exercice 2 (3,5 points)

Deux amis se donnent rendez-vous dans un centre commercial entre 12h00 et 14h00.
Sara décide d'arriver à 12h30 alors que Jade arrive au hasard entre 12h00 et 13h00.
On appelle T la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de Jade.

1. Justifier que T suit une loi uniforme sur l'intervalle $[12;13]$.
2. Calculer la probabilité que Jade arrive avant Sara.
3. Jade n'arrivera pas avant 12h15.Calculer alors la probabilité que Jade arrive avant Sara.
4. Calculer la probabilité que Sara attende plus de 10 minutes.

<u>Exercice 3</u> (6,5 points)

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles.
À la sortie de la fabrication, 5 % d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées.
Les puces restantes sont livrées aux clients.
On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1 000 heures. On observe que 2 % des puces livrées ont une durée de vie courte.
On note L l'événement « La puce est livrée ».
On note C l'événement « La puce a une durée de vie courte c'est-à-dire inférieure ou égale à 1 000 heures ».
Étant donné deux événements A et B, on note $p_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.
   a. Donner la valeur $p_L(C)$.
   b. Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1 000 heures ?
   c. Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaîne de fabrication ?

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

2. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   a. Montrer que $\lambda = -\dfrac{\ln(0{,}98)}{1000}$.
   b. Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 10 000 heures. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
   c. Calculer $p(20\,000 \leq X \leq 30\,000)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat.
3. Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à $0{,}003$.
   On prélève au hasard $15\,000$ puces prêtes à être livrées. On admettra que ce prélèvement de $15\,000$ puces revient à effectuer un tirage avec remise de $15\,000$ puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.
   On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.
   a. Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0{,}003$.
   b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.
   c. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité $p(40 \leq Y \leq 50)$.