Corrigé du D.S. n°8

Exercice 1

Partie 1

1. Le point $C(-6;5\;;-4)$ est un point de (d) si et seulement si il existe un réel t tel que $\begin{cases}-6=1+t\\5=2-t\\-4=4+2t\end{cases}$ Ce système amène à $\begin{cases}t=-7\\t=-3\\t=-4\end{cases}$ donc C n'appartient pas à (d). Faux.

2. Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(1\;;-1;2)$, or $\vec{v}=-2\vec{u}$ donc $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d). Vraie.

3. $\vec{w}(-1;4\;;-2)$ est un vecteur directeur de (d'). $\vec{w}=-\vec{u}$ donc (d) et (d') sont parallèles. Pour $u=0$, $F(-1;4\;;0)$ est un point de (d'). On vérifie, comme pour la question 1, que F est un point de (d) (avec $t=-2$). (d) et (d') sont parallèles et ont un point commun donc (d) et (d') sont confondues. Vraie.

4. Pour la droite (d), $y=0 \Leftrightarrow 2-t=0 \Leftrightarrow t=2$. On obtient alors le point $G(3;0\;;8)$. Vraie.

Partie 2

1. On a $\overrightarrow{AB}(-1-1;2-1;3-6)$ donc $\overrightarrow{AB}(-2;1\;;-3)$ et de même, $\overrightarrow{AC}(-7;4\;;-10)$. $\frac{-7}{2}\neq\frac{4}{1}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et A, B et C ne sont pas alignés. Ils définissent donc un plan.

2. On a $\overrightarrow{BC}(-5\;;3\;;-7)$ donc $\begin{cases}x=-1-5t'\\y=2+3t'\\z=3-7t'\end{cases}$ $(t'\in\mathbb{R})$ et une représentation paramétrique de (BC). Il faut donc résoudre le système $\begin{cases}-1-5t'=1+t\\2+3t'=2-t\\3-7t'=4+2t\end{cases}$. En faisant la somme des deux premières équations, on obtient $1-2t'=3$ donc $t'=-1$. La deuxième équation devient $2+3\times(-1)=2-t$ donc $t=3$. On a alors $3-7t'=3+7=10$ et $4+2t=4+6=10$ donc le couple $t'=-1$ et $t=3$ est bien solution du système donc (d) et (BC) sont sécantes. En remplaçant t par 3 dans la représentation paramétrique de (d) on obtient $D(4\;;-1\;;10)$ qui est donc le point d'intersection de (d) et (BC).

3. $\begin{cases}1=1+t\\2=2-t\\4=4+2t\end{cases} \Leftrightarrow t=0$ donc E est un point de (d). On a $\overrightarrow{AE}(0;1\;;-2)$. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. On cherche α et β tels que $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ce qui équivaut à $\begin{cases}0=-2\alpha-7\beta\\1=\alpha+4\beta\\-2=-3\alpha-10\beta\end{cases}$. En multipliant la deuxième équation par 2 puis en faisant la somme avec la première, on obtient $\beta=2$. La deuxième équation donne alors $\alpha=-7$. Ces deux valeurs ne vérifient pas la troisième équation donc il

n'existe pas de réels α et β tels que $\overrightarrow{AE} = \alpha\,\overrightarrow{AB}+\beta\,\overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont donc pas coplanaires et les points A , B , C et E non plus. Comme $D\in(d)\cap(ABC)$, (d) et (ABC) sont sécants.

Exercice 2

1. Jade arrive au hasard entre 13h et 14 h donc T suit une loi uniforme sur $[13;14]$.
   La densité de cette loi est $f(x) = \dfrac{1}{13-12} = \dfrac{1}{1} = 1$.
2. La probabilité que Jade arrive avant Sara est $p(T<12{,}5) = \int_{12}^{12{,}5} 1\,dt = 12{,}5-12 = 0{,}5$.
3. Il s'agit de calculer $p_{(T>12{,}25)}(T<12{,}5)$. $p_{(T>12{,}25)}(T<12{,}5) = \dfrac{p(12{,}25<T<12{,}5)}{p(T>12{,}25)} = \dfrac{0{,}25}{0{,}75} = \dfrac{1}{3}$.
4. Si Sara attend plus de 10 minutes, c'est que Jade arrive après 12h40. On cherche donc $p(T>12+\frac{2}{3})$. $p(T>12+\frac{2}{3}) = 13-(12+\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$.

Exercice 3

1. a. $p_L(C)$ est la probabilité qu'une puce livrée ait une durée de vie courte, 2 % des puces livrées ont une durée de vie courte donc $p_L(C) = 0{,}02$.
   b. Il s'agit de calculer $p(L\cap\bar{C})$. $p(L\cap\bar{C}) = p(L)\times p_L(\bar{C}) = 0{,}95\times(1-0{,}02) = 0{,}931$.
   c. Il s'agit de calculer $p(\bar{L}\cup C)$. Or $\overline{\bar{L}\cup C} = L\cap\bar{C}$.
   Donc $p(\bar{L}\cup C) = 1-p(L\cap\bar{C}) = 1-0{,}931 = 0{,}069$.
2. a. Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors $p(X>t) = e^{-\lambda t}$. On sait que $p(X>1000) = 0{,}98$ donc $e^{-1000\lambda} = 0{,}98 \Leftrightarrow -1000\,\lambda = \ln(0{,}98) \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln(0{,}98)}{1000}$.
   b. $p(X>10000) = e^{-10000\lambda} = (e^{1000}\lambda)^{10} = 0{,}98^{10} \approx 0{,}817$.
   c. $p(20000<X<30000) = p(X>20000)-p(X>30000) = e^{-20000\lambda}-e^{-30000\lambda} \approx 0{,}122$.
3. a. Choisir une puce ayant une durée de vie courte et une épreuve de Bernoulli de paramètre $0{,}03$. Les choix des puces sont indépendants donc le nombre de puces ayant une durée de vie courte suit une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0{,}003$.
   b. Y suit une loi binomiale donc $E(Y) = n\,p = 15000\times0{,}003 = 45$.
   c. $p(40\leq Y\leq50) = p(Y\leq50)-p(Y\leq39)$. A l'aide de la calculatrice on obtient $p(40\leq Y\leq50) \approx 0{,}7966-0{,}2080 \approx 0{,}589$.