DEVOIR TYPE BAC N° 1

Suites, fonctions, complexes, probabilités	*Le 3 décembre 2014*

Exercice 1 (7 *points*)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- S'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- S'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6 ;

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'événement « le joueur gagne la *n*-ième partie » ;
- p_n la probabilité de G_n .

On a donc $p_1 = 0{,}1$.
Si besoin est, on donnera une approximation des résultats à 10^{-2} près.

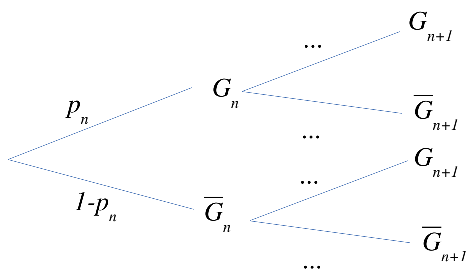
1. a. Montrer que $p_2 = 0{,}62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   b. Le joueur a gagné la première partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
2. a. La commande rand() permet de tirer au hasard un nombre entre 0 et 1. On considère l'algorithme suivant :

```
La variable G est initialisée à 0
Si rand() < 0,1
alors
        la variable G prend la valeur 1
        Si rand() < 0,8
        alors
                la variable G prend la valeur 2
        fin de si
sinon
        Si rand() < 0,6
        alors
                la variable G prend la valeur 1
        fin de si
fin de si
Afficher la variable G
```

   - Expliquer brièvement pourquoi cet algorithme simule le déroulement des deux premières parties du joueur.
   - Qu'affiche en fait la variable G à la fin du programme ?

   b. Comment modifier cet algorithme pour qu'il simule 100 parties successives ?

3. a. Compléter l'arbre pondéré suivant :



b. Montrer que pour tout entier naturel n non nul nul, $p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = p_n - \frac{3}{4}$

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.

c. En déduire que pour tout entier naturel n n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

d. Déterminer la limite de la suite p_n quand n tend vers $+\infty$.

5. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

<u>Exercice 2</u> (8 *points*)

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

A. **Étude d'une fonction auxiliaire.**

On pose pour tout $x \geq 0$, $g(x) = x\sqrt{x} - 1$.

1. En invoquant les fonctions usuelles, justifier que g est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.
2. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?
3. Prouver que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.
4. En déduire les variations de g sur $[0\ ;+\infty[$.
5. calculer $g(1)$. Combien de fois la fonction g s'annule-t-elle sur $[0\ ;+\infty[$?
6. Quel est le signe de g sur $[0\ ;+\infty[$? (On pourra résumer le signe de $g(x)$ dans un tableau)

B. Étude de f sur $]0\ ;+\infty[$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$; prouver que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}.$$

3. Résoudre dans $]0\ ;+\infty[$:

   l'équation (E) : $f'(x) = 0$ et l'inéquation (I) : $f'(x) < 0$.
4. Quelles sont les variations de f sur $]0\ ;+\infty[$? Dresser le tableau de variations de f.

C. Une Équation

Déterminer sur , le nombre de solutions de l'équation :

$$(E_1) : 2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 4 = \pi\sqrt{x}$$

<u>Exercice 3</u> (5 points) **(Élèves n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)**

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+i)z_n .$$

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0 .
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2 .
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	u est un réel, p est un réel, n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p
Traitement	???
Sortie	???

<u>Exercice 3</u> (5 points) **(Élèves ayant choisi l'enseignement de spécialité)**

1. Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer C^2, puis exprimer C^2 en fonction de C .
   b. À l'aide de la calculatrice, calculer C^3 et C^4 .
   c. Quelle conjecture peut-on émettre sur C^n lorsque n est un entier supérieur ou égal à 1 ?
   d. Démontrer cette conjecture.
2. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer D^2 . En déduire que D est inversible et calculer D^{-1} .
   b. Soit $F = D^{-1}E\,D$. Calculer F et F^2 .
   c. Vérifier que $E^2 = D\,F^2D^{-1}$.