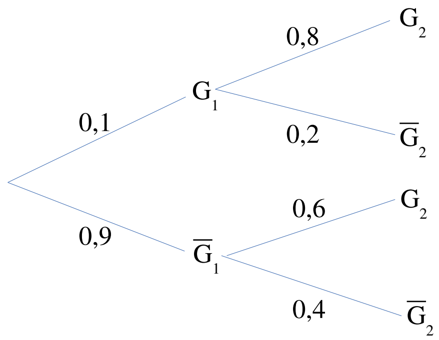
TS

Corrigé du type bac n°1

Exercice 1

1. a. On réalise l'arbre pondéré suivant :



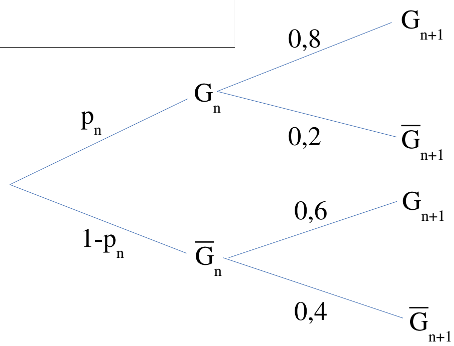
$p_2 = p(G_2) = p(G_1)\times p_{G_1}(G_2)+p(\overline{G_1})\times p_{\overline{G_1}}(G_2) = 0{,}1\times 0{,}8+0{,}9\times 0{,}6 = 0{,}62$.

b. On recherche $p_{G_2}(\overline{G_1})$. D'où $p_{G_2}(\overline{G_1}) = p\dfrac{(\overline{G_1}\cap G_2)}{p(G_2)} = \dfrac{0{,}9\times 0{,}6}{0{,}62} = \dfrac{27}{31} \approx 0{,}87$.

2. a. L'algorithme choisit un nombre au hasard entre 0 et 1.
Si on obtient G = 2, cela signifie que l'on a gagné deux parties.
Si l'on obtient G = 1, cela signifie que l'on a gagné une partie.
Si on obtient G = 0, cela signifie que l'on n'a gagné aucune partie.
b.

```
C prend la valeur 0
G prend la valeur 0
Si rand()<0,1 alors
        C prend la valeur 1
        G prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à 99
        Si G = 1 alors
                Si rand()≥ 0,8 alors
                        La variable G prend la valeur 0
                Fin de si
        Sinon
                Si rand()<0,6 alors
                        La variable G prend la valeur 1
                Fin de si
        Fin de Si
C prend la valeur C + G
Fin de pour
Afficher la variable C
```

3. a. On complète l'arbre pondéré :



b.
$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_n)\times p_{G_n}(G_{n+1})+p(\overline{G_n})\times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = p_n\times 0{,}8+(1-p_n)\times 0{,}6 = 0{,}2\,p_n+0{,}6$

donc pour pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{3}{5}$.

4. a. $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}p_n - \frac{3}{20} = \frac{1}{5}(p_n - \frac{3}{4}) = \frac{1}{5}u_n$. Par conséquent, (u_n) est la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{3}{4} = -0{,}65$.

b. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n non nul,
$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0{,}65 \times (\frac{1}{5})^{n-1}$.

c. Comme $u_n = p_n - \frac{3}{4}$, alors $p_n = u_n + \frac{3}{4}$. De plus, $0{,}65 = \frac{13}{20}$ d'où pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} \times (\frac{1}{5})^{n-1}$.

d. Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{5})^n = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{4}$ (par produit et somme de limites).

5. $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ équivaut à $\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{13}{20} \times (\frac{1}{5})^{n-1} < 10^{-7}$, c'est-à-dire à $\frac{13}{20} \times (\frac{1}{5})^{n-1} < 10^{-7}$.
Par suite, $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ équivaut à $(\frac{1}{5})^{n-1} < \frac{20}{13} \times 10^{-7}$. D'après la calculatrice, on a $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ lorsque $n \geq 11$.

Exercice 2

A. Étude d'une fonction auxiliaire.

1. On a $g = u \times v - 1$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
Or la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction v est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Donc la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
2. $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{x} - 1 - (-1)}{x} = \sqrt{(x)}$. D'où $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$; par conséquent, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
3. $g' = u' \times v + u \times v' - 0$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
D'où $g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}^2}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, pour tout réel x strictement positif.
4. Comme $\frac{3}{2}\sqrt{x} > 0$ pour tout réel x strictement positif, alors g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
5. $g(1) = 1 \times \sqrt{1} - 1 = 0$.
Comme la fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$, donc continue sur $[0, +\infty[$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que g(1) `=` 0, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation g(x) `=` 0 s'annule une seule fois pour x `=` 1.
6. D'après les variations de g et la question précédente, on en déduit que :
- si $x < 1$, $g(x) < 0$
- si $x = 1$, $g(x) = 0$
- si $x > 1$, $g(x) > 0$

B. Étude de f sur $]0,+\infty[$

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 0$ (par quotient de limites).
   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x-3 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (par somme de limites).
   $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0^{+}$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{\sqrt{x}} = +\infty$ (par quotient de limites).
   Or $\lim\limits_{x \to 0} 2x-3 = -3$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ (par somme de limites).

2. On a $f = w+h$ avec $w(x) = 2x-3$ et $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 4\times\dfrac{1}{v(x)}$.

   D'où $f' = w'+h'$ avec $w'(x) = 2 \, et \, h'(x) = 4\times\dfrac{-v'(x)}{v(x)^2} = -4\times\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$.
   Par suite, $f'(x) = 2-\dfrac{2}{x\sqrt{x}} = \dfrac{2(x\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}}$. Par conséquent, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$.

3. D'après la question précédente, comme $\dfrac{2}{x\sqrt{x}} > 0$ pour tout réel x strictement positif, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$. Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $[0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

4. On en déduit le tableau des variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

C. Résolution d'une équation

1. Comme x est strictement positif, alors $2x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+4 = \pi\sqrt{x}$ équivaut à
   $\dfrac{2x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = \dfrac{\pi\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2x-3+\dfrac{4}{\sqrt{x}} = \pi$, c'est-à-dire $f(x) = \pi$.
   Comme la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$, et que $\pi\in[3;+\infty]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \pi$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;1]$.
   Comme la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, et que $\pi\in[3;+\infty]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \pi$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   Par conséquent, l'équation (E) admet deux solutions x_1 et x_2 dans $]0,+\infty[$.

2. En utilisant la calculatrice on obtient, $0{,}73 < x_1 < 0{,}74$ et $1{,}34 < x_2 < 1{,}35$.

Exercice 3 non spécialistes

1. $u_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.

2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+i)z_n| = |(1+i)| \times |z_n| = \sqrt{1^2+1^2} \times u_n = \sqrt{2} u_n$.
   Par conséquent, (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2 .

3. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times (\sqrt{2})^n = 2(\sqrt{2})^n$.

4. Comme $\sqrt{2} > 1$, alors $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{2})^n = +\infty$. Par conséquent, = $\lim\limits_{x \to 0} u_n = +\infty$.

5.

Variables	u est un réel, p est un réel, n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p
Traitement	Tant que $u \leq p$ Affecter à u la valeur $\sqrt{2}u$ Affecter à n la valeur $n+1$ Fin du tant que
Sortie	Afficher n

Programme AlgoBox

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  u PREND_LA_VALEUR 2
  AFFICHER "Entrer la précision souhaitée  "
  LIRE p
  TANT_QUE (u<p) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    u PREND_LA_VALEUR sqrt(2)*u
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "La valeur de n cherchée est  "
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 3 spécialistes

1. a. $C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $C^2 = 3C$.

b. $C^3 = \begin{pmatrix} 18 & -9 & -9 \\ -9 & 18 & -9 \\ -9 & -9 & 18 \end{pmatrix}$ et $C^4 = \begin{pmatrix} 54 & -27 & -27 \\ -27 & 54 & -27 \\ -27 & -27 & 54 \end{pmatrix}$.

c. Il semble que $C^n = 3^{n-1} \times C$ lorsque n est un entier supérieur ou égal à 1.

d. Soit P_n la proposition : « pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $C^n = 3^{n-1} \times C$ »

Initialisation : Comme $3^{1-1} \times C = C$, on a P_0 qui est vraie.

Hérédité : Soit $p \geq 0$. Supposons que P_p est vraie. Alors : $C^p = 3^{p-1} \times C$.

$C^{n+1} = C^n \times C = 3^{n-1} \times C \times C = 3^{n-1} \times C^2 = 3^{n-1} \times 3C = 3^n \times C$.

On en déduit que P_{p+1} est vraie.

On a alors prouvé :

P_0 est vraie et pour tout p supérieur ou égal à 0, Si P_p est vraie alors $P\, p+1$ est vraie aussi.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 0, P_n est vraie.

C'est-à-dire : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $C^n = 3^{n-1} \times C$.

2. a. $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On remarque que $D^2 = 3I_2$; par suite, $\frac{1}{3} D \times D = I_2$. Par conséquent, D est inversible et

$D^{-1} = \frac{1}{3} D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b. $D^{-1}E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ donc

$F = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis

$F^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

c. $DF^2D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 9 \\ 72 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 18 & 27 \end{pmatrix}$ et

$F^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 18 & 27 \end{pmatrix}$. Donc $E^2 = DF^2D^{-1}$.

Autre méthode : On sait que $F = D^{-1}ED$.

D'où $DF^2D^{-1} = D \times D^{-1}ED \times D^{-1}ED \times D^{-1} = I_2 E I_2 E I_2 = E^2$.