Corrigé du type bac n°2

Exercice 1

Partie A

1. a. $g(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3 - (x-3) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} = e^{-x}(5 - 3e^{-x})$. Sur $[0;+\infty[$, $0 < e^{-x} \leq 1$ donc $5 - 3e^{-x} > 0$ et par suite $g(x) > 0$.
2. $g(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$ donc $f(x) > x - 3$ et la courbe C_f est toujours strictement au-dessus de (d) . C_f et (d) n'ont donc pas de point commun.

Partie B

1. On a $M(x; f(x))$ et $N(x; x-3)$ donc $MN = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x)-(x-3))^2} = |g(x)| = g(x)$ puisque $g(x) > 0$.
2. $g(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x}$ donc $g'(x) = -5e^{-x} - 3\times(-2)e^{-2x} = 6e^{-2x} - 5e^{-x}$.
3. Étudions le signe de g' sur $[0;+\infty[$. $g'(x) = 6e^{-2x} - 5e^{-x} = e^{-x}(6e^{-x} - 5)$. $e^{-x} > 0$ et $6e^{-x} - 5 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > \frac{5}{6} \Leftrightarrow -x > \ln(\frac{5}{6}) \Leftrightarrow x < \ln 6 - \ln 5$. On a donc :

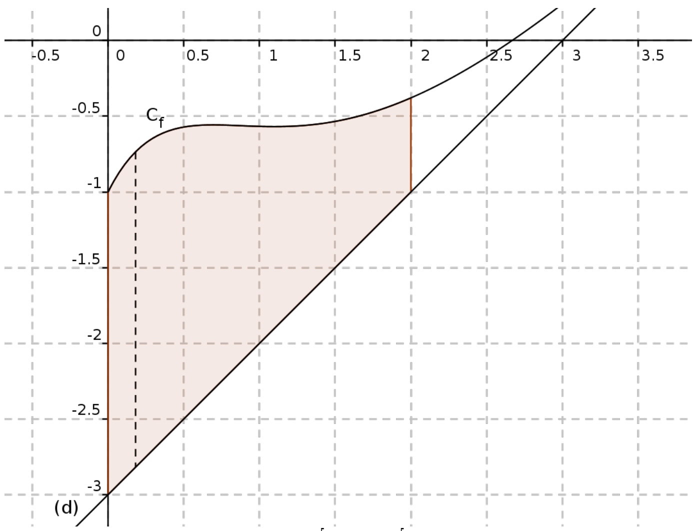
x	0		$\ln 6 - \ln 5$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0
g	2	$\nearrow$	$\frac{25}{12}$	$\searrow$	0

$$g(\ln 6 - \ln 5) = 5e^{-(\ln 6 - \ln 5)} - 3e^{-2(\ln 6 - \ln 5)} = 5\frac{e^{\ln 5}}{e^{\ln 6}} - 3\left(\frac{e^{\ln 5}}{e^{\ln 6}}\right)^2 = 5\times\frac{5}{6} - 3\times\frac{25}{36} = \frac{25}{12}$$

La plus grande distance entre C_f et (d) est donc $\frac{25}{12}$ et elle est obtenue pour $x = \ln 6 - \ln 5 \approx 0{,}18$.

Partie C

1. Voir graphique.



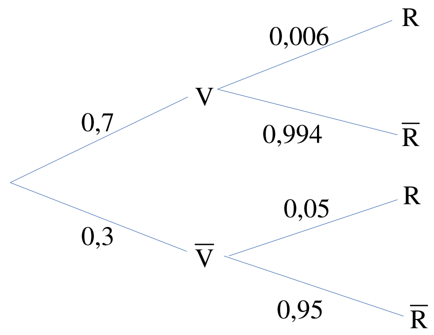
2. $A'(x) = f(x) - (x-3) = g(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$ donc A est une fonction croissante sur $[0;+\infty[$.
3. $A(x) = \int_0^x (f(t) - (t-3))dt = \int_0^x (5e^{-x} - 3e^{-2x})dt = [-5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}]_0^x = \frac{3}{2}e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{7}{2}$.

4. A est une fonction strictement croissante et continue sur $[0;+\infty[$. De plus, $A(0)=0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = 0-0+\frac{7}{2} = \frac{7}{2} > 2$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $A(\alpha)=2$.

Exercice 2

Partie A

1. Voir ci-contre



2. $p(V \cap R) = p_V(R) \times p(V) = 0{,}7 \times 0{,}006 = 0{,}0042$.
3. $p(R) = p_V(R) \times p(V) + p_{\bar{V}}(R) \times p(\bar{V}) = 0{,}0042 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}0042 + 0{,}015 = 0{,}0192$.
4. Il s'agit de déterminer $p_R(\bar{V})$. $p_R(\bar{V}) = p\dfrac{(R \cap \bar{V})}{p(R)} = \dfrac{p_{\bar{V}}(R) \times p(\bar{V})}{p(R)} = \dfrac{0{,}015}{0{,}0192} \approx 0{,}7813$.

Partie B

1. pour une variable aléatoire T suivant une loi normale $N(17;1{,}2^2)$ on obtient à l'aide d'une calculatrice $p(15<T<20) \approx 0{,}9460$.
2. Il s'agit de calculer $p(T>20)$. La calculatrice donne $p(T>20) \approx 0{,}0062$.
3. Il s'agit de déterminer t tel que $p(T<t) = 0{,}9$. Pour T suivant une loi normale $N(17;1{,}2^2)$ la calculatrice donne la valeur $18{,}38$ soit environ 19 minutes. L'élève doit donc partir à 7h41 pour arriver à l'heure avec une probabilité de $0{,}9$.

Partie C

1. Z' suit une loi normale centrée réduite.
2. On sait que $p(T'>20) = 0{,}05$, donc $p(T'<20) = 0{,}95$. $T' < 20 \Leftrightarrow \dfrac{T'-15}{\sigma'} < \dfrac{20-15}{\sigma'}$ ce qui revient à $Z' < \dfrac{5}{\sigma'}$. On a donc $p(Z'<\dfrac{5}{\sigma'}) = 0{,}95$ et comme Z' suit une loi normale centrée réduite, on a grâce à la calculatrice $\dfrac{5}{\sigma'} \approx 1{,}645$. Ceci amène à $\sigma' \approx 3{,}04$.

Exercice 3

1. a) D_1 passe par $A_1(0;2;-1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}_1(1;2;3)$ donc une représentation paramétrique de D_1 est $\begin{cases} x = t \\ y = 2+2t \\ z = -1+3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

   b) Un vecteur directeur de D_2 est $\vec{u}_2(1;-2;0)$.

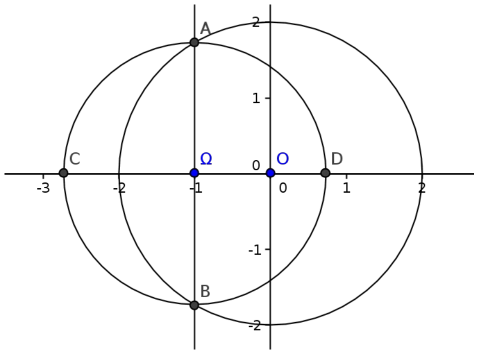
   c) On cherche k tel que $\begin{cases} -1 = 1+k \\ 4 = -2k \\ 2 = 2 \end{cases}$. La première équation donne $k=-2$ et cette valeur vérifie aussi la deuxième équation (et bien sur la troisième) donc $A_2 \in D_2$.

2. Cherchons les points d'intersection de D_1 et D_2. Il s'agit de résoudre le système : $\begin{cases} t = 1+k \\ 2+2t = -2k \\ -1+3t = 2 \end{cases}$. La troisième équation donne $t = 1$ puis la première amène à $k = 0$. Ces deux valeurs ne vérifient pas la deuxième équation donc le système n'a pas de solutions et les deux droites sont disjointes. Par ailleurs, on a $\vec{u}_1(1;2;3)$ et $\vec{u}_2(1;-2;0)$ donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires ($\frac{1}{1} \neq \frac{2}{-2}$) et D_1 et D_2 ne sont donc pas parallèles. Comme D_1 et D_2 sont disjointes, elles ne sont pas coplanaires.
3. $A_1 \in D_1$ et $A_1 \in \Delta_1$ donc D_1 et Δ_1 sont coplanaires. $\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = -6\times 1+(-3)\times 2+4\times 3 = 0$ donc $\vec{v}$ et $\vec{u}_1$ sont orthogonaux et les droites D_1 et Δ_1 aussi. Comme ces droites sont coplanaires, elles sont donc perpendiculaires.
4. a) $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 17\times 1+(-22)\times 2+9\times 3 = 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{u}_1$ sont orthogonaux.
$\vec{n} \cdot \vec{v} = 17\times(-6)+(-22)\times(-3)+9\times 4 = 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{u}_1$ sont orthogonaux. $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P_1, donc $\vec{n}$ est bien un vecteur normal de P_1.
b) $\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 17\times 1+(-22)\times(-2)+9\times 0 = 61 \neq 0$ donc $\vec{n}$ n'est pas un vecteur normal de P_2 et donc P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.
5. Δ est parallèle à Δ_1 donc Δ est orthogonale à D_1. Comme $\Delta \subset P_1$, Δ et D_1 sont coplanaires et sont donc aussi perpendiculaires. On montre de la même façon que Δ et D_2 sont perpendiculaires ce qui répond à la question.

Exercice 4

(Élèves n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

1. $f(-1+i\sqrt{3}) = (-1+i\sqrt{3})^2+2(-1+i\sqrt{3})+9 = 1-2i\sqrt{3}-3-2+2i\sqrt{3}+9 = 5$.
2. $f(z) = 5 \Leftrightarrow z^2+2z+9 = 5 \Leftrightarrow z^2+2z+4 = 0$. On cherche les racines d'un trinôme à coefficients réels. On sait par la question 1 que $-1+i\sqrt{3}$ est une des racine, donc l'autre racine est $\overline{-1+i\sqrt{3}} = -1-i\sqrt{3}$.
$-1+i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}) = 2e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et
$-1-i\sqrt{3} = \overline{-1+i\sqrt{3}} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$
3. $f(z) = 5 \Leftrightarrow z^2+2z+9 = 5 \Leftrightarrow z^2+2z+4 = 0$. Cette équation du second degré à coefficients réels admet deux racines complexes conjuguées si et seulement si son discriminant est négatif.
$\Delta = 2^2-4(9-\lambda) = 4(\lambda-8)$ Donc $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(\lambda-8) < 0 \Leftrightarrow \lambda < 8$.
4. $|f(z)-8| = 3 \Leftrightarrow |z^2+2z+9-8| = 3 \Leftrightarrow |z^2+2z+1| = 3 \Leftrightarrow |(z+1)^2| = 3 \Leftrightarrow |z+1| = \sqrt{3}$.
Soit M le point d'affixe z, $|z+1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |z-z_\Omega| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{3}$ donc (F) est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.
5. a)
$f(z) = (x+iy)^2+2(x+iy)+9 = x^2-y^2+2ixy+2x+2iy+9 = x^2-y^2+2x+9+i(2xy+2y)$.
b) $f(z)$ est un nombre réel si et seulement si $\mathrm{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow 2xy+y = 0$. Or, $2xy+y = 0 \Leftrightarrow y(x+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -1$ donc (E) est la réunion des droites d'équations $y = 0$ et $x = -1$.



6. $M\in(F) \Leftrightarrow |z+1|=\sqrt{3} \Leftrightarrow |x+iy+1|=\sqrt{3}$. Pour M appartenant à la droite d'équation $y=0$, on obtient $|x+1|=\sqrt{3}$ qui amène à $x=-\sqrt{3}-1$ ou $x=\sqrt{3}-1$. Pour M appartenant à la droite d'équation $x=-1$, on obtient $|iy|=\sqrt{3} \Leftrightarrow |y|=\sqrt{3}$ qui amène à $y=-\sqrt{3}$ ou $y=\sqrt{3}$. Les points d'intersection de (F) et (E) sont donc les points $A(-1+i\sqrt{3})$, $B(-1-i\sqrt{3})$, $C(-\sqrt{3}-1)$ et $D(\sqrt{3}-1)$.

Exercice 4

(Élèves ayant choisi l'enseignement de spécialité)

Partie A

1. a) $n^2\equiv N-1(N) \Leftrightarrow n^2\equiv -1(N) \Rightarrow (n^2)^2\equiv(-1)^2(N) \Leftrightarrow n\times n^3\equiv 1(N)$.
   b) On a $5^2\equiv 26-1(26)$ donc $5\times 5^3\equiv 1(26)$. On peut donc choisir $k_1=5^3=125$.

2. a) $6A-A^2=6\times\begin{pmatrix}4&1\\3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&1\\3&2\end{pmatrix}^2=\times\begin{pmatrix}24&6\\18&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}19&6\\18&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=5I$.

   b) $6A-A^2=5I \Leftrightarrow A(6I-A)=5I \Leftrightarrow A\dfrac{(6I-A)}{5}=I$ donc A est une matrice inversible et $A^{-1}=\dfrac{6}{5}I-\dfrac{1}{5}A$. On a donc $\alpha=\dfrac{6}{5}$ et $\beta=-\dfrac{1}{5}$.

   c) $5A^{-1}=6I-A=\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}=B$.

   d) $AX=Y \Rightarrow A^1AX=A^{-1}Y \Leftrightarrow X=A^{-1}Y \Leftrightarrow 5X=5A^{-1}Y \Leftrightarrow 5X=BY$.

Partie B

Pour « ET », on a $X_1=4$ et $X_2=19$ puis $\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\50\end{pmatrix}$.

$35-26=9$ Donc $R_1=9$ et $50-26=24$ Donc $R_2=9$ et le mot « ET » est donc codé par le mot « JY ».

Partie C

1. $Y=AX \Leftrightarrow 5X=BY \Leftrightarrow 5\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5X_1\\5X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2Y_1-Y_2\\-3Y_1+4Y_2\end{pmatrix}$ donc on a bien $\begin{cases}5X_1=2Y_1-Y_2\\5X_2=-3Y_1+4Y_2\end{cases}$.

2. On sait que $5\times 21\equiv 1(26)$ donc $X_1\equiv 5\times 21X_1(26)$. Or $5\times 21X_1=42Y_1-21Y_2$, $42\equiv 16(26)$ et $-21\equiv 5(26)$ donc $X_1\equiv 16Y_1+5Y_2(26)$. On établi de la même façon que $X_2\equiv 15Y_1+6Y_2(26)$.

3. Remarquons que l'on a aussi $\begin{cases}X_1\equiv 16R_1+5R_2(26)\\X_2\equiv 15R_1+6R_2(26)\end{cases}$. Pour « QP » on a $R_1=16$ et $R_2=15$ qui donnent donc $16R_1+5R_2=331\equiv 19(26)$ et $15R_1+6R_2=330\equiv 18(26)$. Le décodage du mot « QP » donne donc « TS ».