BACCALAURÉAT BLANC		Session 2016
Épreuve de **: MATHÉMATIQUES**		
Série **: S**	***Durée*** **: 4 heures**	***Coefficient*** **: 7**

OBLIGATOIRE

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices. Il est demandé de traiter chaque exercice sur des copies séparées.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille avec les **Annexes** sera à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (*5 points*)

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 1er mois / Retards le 2ème mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1 000

1. On choisit au hasard un individu de cette population.
   a) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois.
   b) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.
2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :
   - si l'individu n'a pas eu de retard le mois n , la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.
   - si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.
   - si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n , la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

   On note A_n , l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n », B_n l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », et C_n , l'événement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».

   Les probabilités des événements A_n , B_n , C_n sont notées respectivement p_n , q_n et r_n .

   a) Pour le premier mois ($n=1$), les probabilités p_1 , q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1 , q_1 et r_1 .

   b) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , q_n , et r_n . On pourra s'aider d'un arbre.

   c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0{,}2\,p_n + 0{,}66$.

   d) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0{,}55$.
   Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

   e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 2 : (*5 points*)

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On prendra comme unité $2\,cm$ sur chaque axe.

Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2+2z+9$.

1. Calculer l'image de $-1+i\sqrt{3}$ par la fonction f.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$. Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).

   On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.

   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit $(\mathscr{F})$ l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z)-8| = 3$.

   Prouver que $(\mathscr{F})$ est le cercle de centre $\Omega(-1\,;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Tracer $(\mathscr{F})$ sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x+iy$ où x et y sont des nombres réels.

   a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est $(x^2-y^2+2x+9)+i(2xy+2y)$.

   b) On note $(\mathscr{E})$ l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel. Montrer que $(\mathscr{E})$ est la réunion de deux droites d_1 et d_2 dont on précisera les équations.

   Compléter le graphique en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{F})$.

Exercice 3 : (*4 points*)

On considère l'équation (E_1) : $e^x - x^n = 0$ où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $\ln x - \frac{x}{n} = 0$.

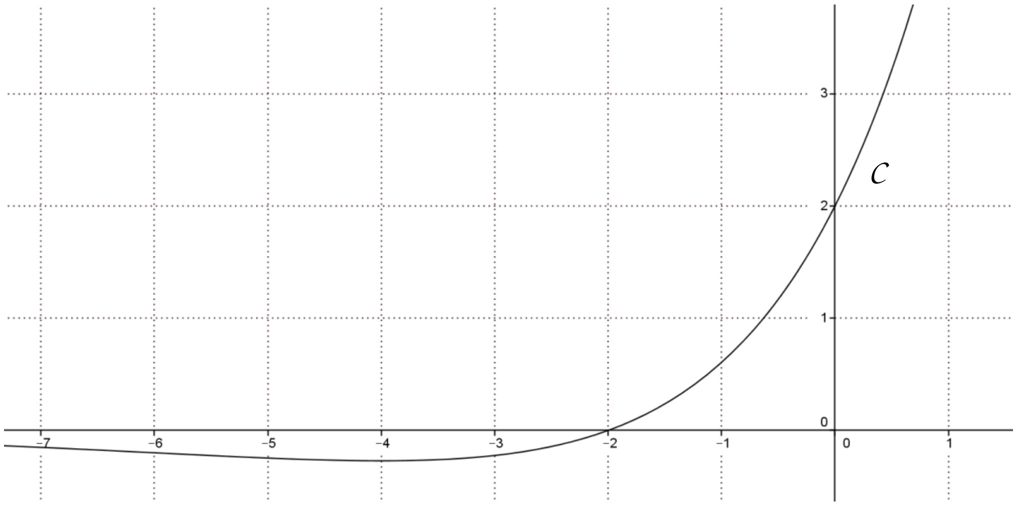
2. Pour quelle(s) valeur(s) de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

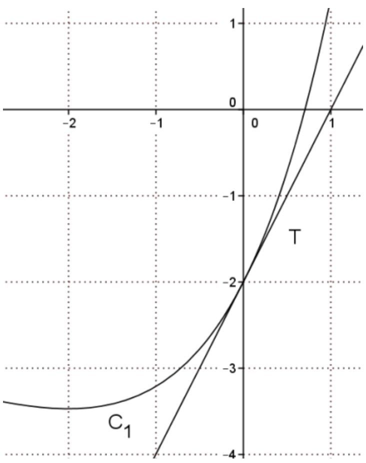
Exercice 4 : (*6 points*)

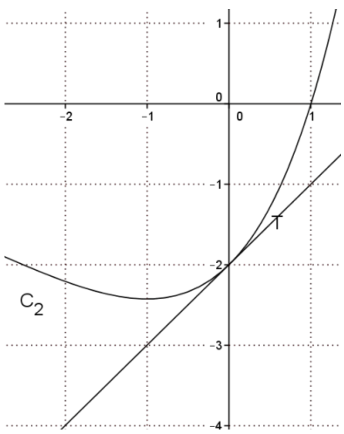
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

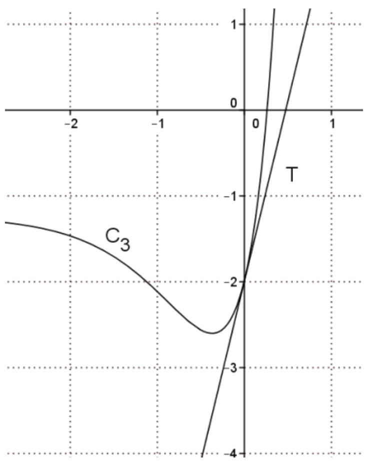
Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.









1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   a) À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
   b) L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
   Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{2}x}$.

1. L'observation de la courbe C permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

   a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.

   b) En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

   a) Interpréter géométriquement le réel I.

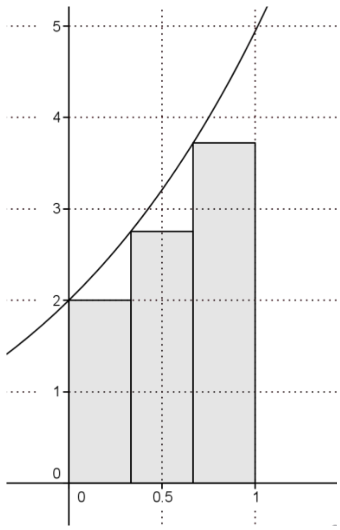
   b) Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
   Vérifier que $f = 2(u'v+uv')$.

   c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

3. On donne l'algorithme ci-dessous :

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels, s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$ Affecter à s la valeur $s+\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note S_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.



   a) Justifier que S_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-contre où les trois rectangles ont la même largeur.

   b) Que dire de la valeur de S_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?