Corrigé du bac blanc

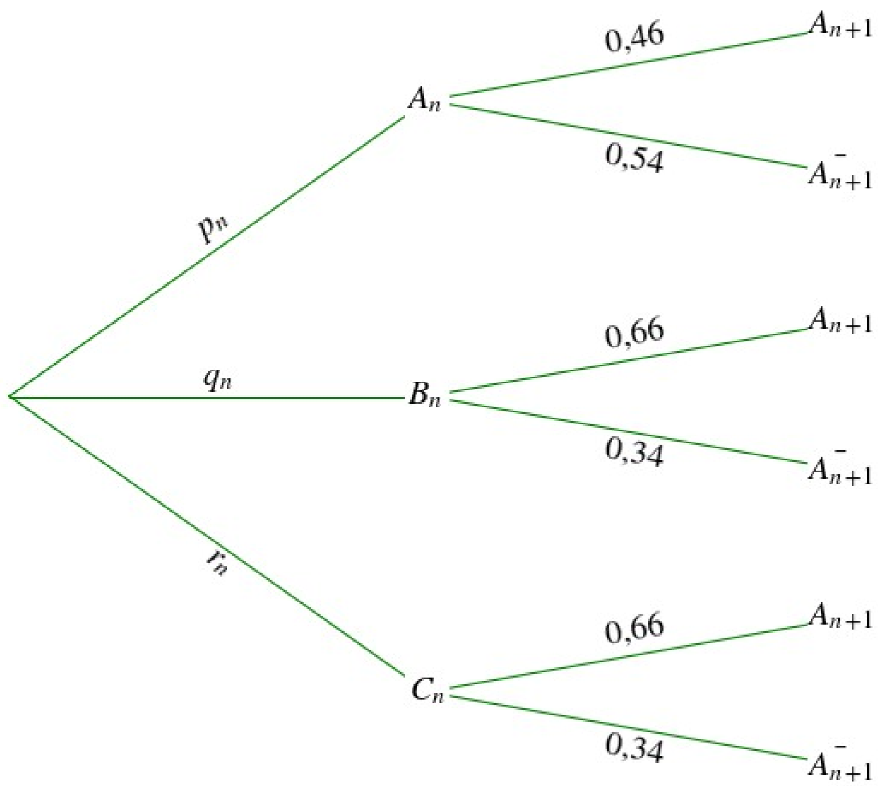
Exercice 1

1. a) $318+110 = 428$; il y a donc 428 individus sur 1000 . Or $\dfrac{428}{1000} = 0{,}428$. Donc la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois est égale à $0{,}428$.

   b) Il y a 572 individus qui n'ont pas eu de retard le premier mois, parmi eux 310 ont eu un retard le deuxième mois. Par conséquent, la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois, est égale à $\dfrac{310}{572} \approx 0{,}542$.

2. a) D'après le tableau, $p_1 = 0{,}512$, $q_1 = 0{,}318$ et $r_1 = 0{,}110$.

   b) On dresse l'arbre suivant :



$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) + p(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(A_n) \times p_{A_n}(B_{n+1}) + p(A_n) \times p_{A_n}(C_{n+1}) \\ &= 0{,}46\, p_n + 0{,}66 q_n + 0{,}66 r_n \end{aligned}$$

   c) On sait que $p_n + q_n + r_n = 1$; par suite $q_n + r_n = 1 - p_n$ donc

   $p_{n+1} = 0{,}46\, p_n + 0{,}66(1 - p_n) = -0{,}2\, p_n + 0{,}66$.

   d) $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}55 = -0{,}2\, p_n + 0{,}66 - 0{,}55 \vee 0{,}2\, p_n + 0{,}11 = -0{,}2(p_n - 0{,}55) = -0{,}2 u_n$

   donc (u_n) est une suite géométrique de raison $-0{,}2$ et de premier terme

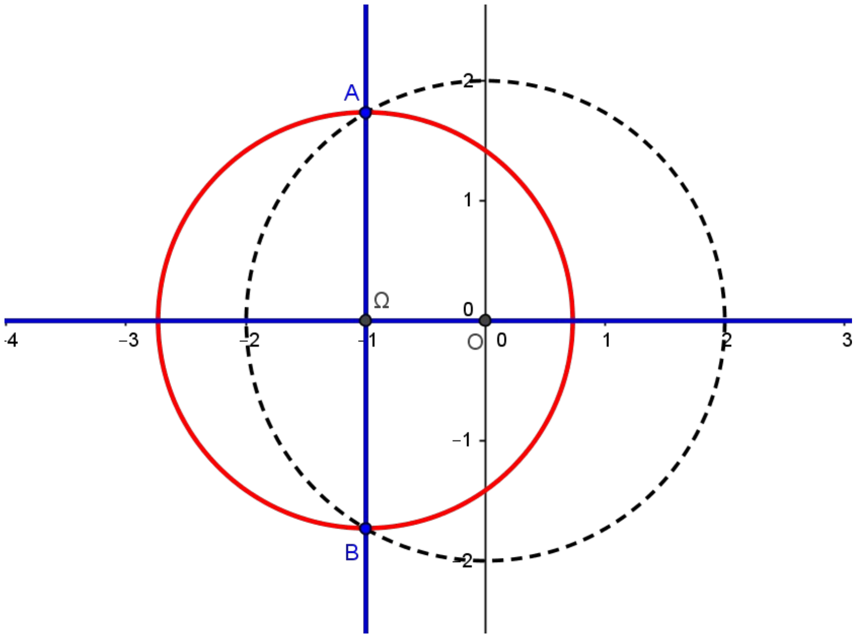
   $u_1 = p_1 - 0{,}55 = 0{,}572 - 0{,}55 = 0{,}022$.

   e) D'après la question précédente, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 0{,}022 \times (-0{,}2)^n$.
   comme -1 `<` -0,2 `<` 1 on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et comme $p_n = u_n + 0{,}55$, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}55$.

Exercice 2

1. $f(-1+i\sqrt{3}) = (-1+i\sqrt{3})^2+2(-1+i\sqrt{3})+9 = 1-2i\sqrt{3}-3-2+2i\sqrt{3}+9 = 5$.

2. $f(z) = 5 \Leftrightarrow z^2+2z+9 = 5 \Leftrightarrow z^2+2z+4 = 0$. Pour cette dernière équation du second degré, $\Delta = 4-16 = -12$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées,
$z_1 = \dfrac{-2-i\sqrt{12}}{2} = -1-i\sqrt{3}$ et $z_2 = \dfrac{-2+i\sqrt{12}}{2} = -1+i\sqrt{3}$.
$z_A = z_2 = -1+i\sqrt{3} = 2(\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}) = 2e^{\frac{2\pi}{3}}$ et $z_B = z_1 = \bar{z}_A = 2e^{-\frac{2\pi}{3}}$.
Comme $|z_A| = |z_B| = 2$, A et B se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon 2 .
Comme $x_A = x_B = -1$, A et B se trouvent sur la droite d'équation $x = -1$.



3. $f(z) = \lambda \Leftrightarrow z^2+2z+9 = \lambda \Leftrightarrow z^2+2z+9-\lambda = 0$.
L'équation du second degré $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées si $\Delta < 0$.
Or $\Delta = 4-4(9-\lambda) = 4(\lambda-8)$. Par suite, $\Delta < 0$ équivaut à $\lambda < 8$.
Donc l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées lorsque $\lambda < 8$.

4. $f(z)-8 = z^2+2z+9-8 = z^2+2z+1 = (z+1)^2$. Donc,
$|f(z)-8| = 3 \Leftrightarrow |(z+1)^2| = 3 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 3 \Leftrightarrow |z+1| = \sqrt{3}$ donc $(\mathscr{F})$ est le cercle de centre Ω d'affixe $z_\Omega = -1$, c'est-à-dire $\Omega(-1;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

5. a) $\begin{aligned} f(z) &= (x+iy)^2+2(x+iy)+9 = x^2+2ixy-y^2+2x+2iy+9 \\ &= (x^2-y^2+2x+9)+i(2xy+2y) \end{aligned}$.
b) $f(z)$ est un nombre réel si, et seulement si, $2xy+2y = 0$.
$2xy+2y = 0 \Leftrightarrow 2y(x+1) = 0$ ce qui équivaut à $y = 0$ ou $x = -1$.
Donc est la réunion des droites d_1 et d_2 , d'équations respectives $y = 0$ et $x = -1$.

6. Les points d'intersection de $(\mathscr{F})$ et de la droite d_1 ont pour coordonnées $(-1-\sqrt{3};0)$ et $(-1+\sqrt{3};0)$.

$|z_A - z_\Omega| = |-1 + i\sqrt{3} + 1| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ d'où A appartient à $(\mathscr{F})$.

$|z_B - z_\Omega| = |-1 - i\sqrt{3} + 1| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ d'où B appartient à $(\mathscr{F})$.

De plus, A et B appartiennent à la d_2 et il y a au plus deux points d'intersection entre une droite et un cercle donc Les points d'intersection de $(\mathscr{F})$ et de la droite d_2 ont pour coordonnées $(-1\,;-\sqrt{3})$ et $(-1\,;\sqrt{3})$.

Exercice 3

1. $e^x - x^n = 0 \Leftrightarrow e^x = x^n \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(x^n)$ (car x est strictement positif donc x^n aussi) puis $\ln(e^x) = \ln(x^n) \Leftrightarrow x = n\ln x \Leftrightarrow x = n\ln x \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{x}{n}$ ($n > 0$).

2. Le nombre de solution de l'équation (E_1) est donc le même que le nombre de solutions de l'équation (E_2) puisque les deux équations sont équivalente. Pour étudier le nombre de solutions de l'équation (E_2), considérons la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{n}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{n} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

$f(x) = \ln x - \dfrac{x}{n} = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{n}\right)$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

f est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-x}{nx}$. n et x sont strictement positifs, donc $f'(x)$ est du signe de $n - x$ et on obtient le tableau suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln n - 1$	$\searrow$	$-\infty$

Le maximum de la fonction f est donc $\ln n - 1$, ainsi, Si $\ln n - 1 < 0 \Leftrightarrow n < e$ c'est-à-dire si $n = 1$ ou $n = 2$ l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution. A contrario, si $n > 2$, alors $\ln n - 1 > 0$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0\,;n[$ et $0 \in]-\infty\,;\ln n - 1[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]0\,;n[$. De la même façon, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]n\,;+\infty[$. Comme l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation (E_2) donc à (E_1), on peut dire que l'équation (E_1) admet deux solution si $n > 2$, c'est-à-dire, si n est un entier supérieur ou égal à 3.

Exercice 4

Partie A

1. $f(x) \leq 0 \quad si\, x \in]-\infty;-2]$ et $f(x) \geq 0 \quad si\, x \in [-2;+\infty[$.

2. a) Par lecture graphique, $f(-2) = 0$ et $f(0) = 2$. Or F est une primitive de f , donc $F' = f$ et donc $F'(-2) = 0$ et $F'(0) = 2$.
   b) La tangente au point d'abscisse 0 de la courbe C_2 a pour pente $\dfrac{-1-(-2)}{1-0} = 1$. Or $F'(0) = 2$ donc C_2 ne représente pas la fonction F .
   La tangente au point d'abscisse 0 de la courbe C_3 a pour pente $\dfrac{0-(-2)}{0{,}5-0} = 4$. Donc C_3 ne représente pas non plus la fonction F . Ainsi c'est la courbe C_1 qui représente la fonction F .
   Remarque : on constate aussi que seule la courbe C_1 a une tangente horizontale au point d'abscisse -2 .

Partie B

1. a) $f = u \times v$ avec $u(x) = x+2$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$.
   on a alors $f'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = e^{\frac{1}{2}x}+(x+2)\times\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.
   b) Comme $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $x+4$. Il en découle que $f'(x) \leq 0$ si $x \leq -4$ et $f'(x) \geq 0$ si $x \geq -4$.
   Par conséquent, f est décroissante sur $]-\infty;-4]$ et croissante sur $[-4;+\infty[$. f admet donc bien un minimum pour $x = -4$.

2. a) La fonction f est positive sur $[0;1]$; I est donc l’aire (en unité d’aire) du domaine compris entre l’axe des abscisses, la courbe C , et les droites d’équation $x = 0$ et $x = 1$.
   b) $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$, $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$ et par suite,
   $2(u'(x)v(x)+u(x)v'(x)) = 2(e^{\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x}) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x} = f(x)$.
   On a donc bien $f = 2(u'v+uv')$.
   c) $f = 2(u'v+uv') = 2(uv)'$, donc $2uv$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a donc
   $I = \int_0^1 f(x)\,dx = [2uv]_0^1 = 2e^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$.

3. a)

k	s
	0
0	$\frac{1}{3}f(\frac{0}{3})=\frac{1}{3}f(0)$
1	$\frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(\frac{1}{3})$
2	$\frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{3}f(\frac{2}{3})$

Donc $S_3=\frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{3}f(\frac{2}{3})$. Or, les trois rectangles qui forment le domaine hachuré ont chacun pour base $\frac{1}{3}$ et pour hauteurs respectives, $f(0)$, $f(\frac{1}{3})$ et $f(\frac{2}{3})$. l'aire de ce domaine est donc $\frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{3}f(\frac{2}{3})=S_3$.

b) $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})\right)$ est la somme des aires des n rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ situés sous la courbe C , entre les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

Par conséquent, lorsque n devient grand, la valeur de S_n se rapproche de I .