DEVOIR SURVEILLÉ N° 1	
Suites et démonstration par récurrence	***Le 28 septembre 2015***

Exercice 1 (2 *points*)

Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :
« Soit un réel a strictement positif. Pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1+na$ ».

Exercice 2 (4 *points*)

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

1) $u_n = \dfrac{4n^2+3n-1}{2n+1}-2n+3$

2) $u_n = \dfrac{n^2+5n+7}{2-n}$

3) $u_n = 2-n+(-1)^n$

4) $u_n = 3\times\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{4}}$

Exercice 3 (4 *points*)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2-2u_n+2$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. On admet que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.
   a) Montrer que $u_{n+1}-u_n = (u_n-2)(u_n-1)$.
   b) Déterminer le signe de $u_{n+1}-u_n$.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. Peut-on déduire sa limite ?

Exercice 4 (3 *points*)

Pour chacune des informations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse. **Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point**.

1. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{2n+\cos n}{n}$ est convergente vers 2 .
2. Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante, converge vers 0 .
3. Toute suite (w_n) croissante diverge vers $+\infty$.

<u>Exercice 5</u> (7 *points*) Antilles-Guyane, juin 2015

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée	Demander la valeur de p
Traitement	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0{,}5u+0{,}5(k-1)-1{,}5$ Fin de pour
Sortie	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p=2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=0{,}5u_n+0{,}5n-1{,}5$.

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p=4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}375$

   Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1}>u_n$.
   Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=0{,}1u_n-0{,}1n+0{,}5$.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}5$ et exprimer alors v_n en fonction de n.
5. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=10\times0{,}5^n+n-5$.
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).