Corrigé du D.S. n°1

Exercice 1

Soit P_n la proposition : « $(1+a)^n \geq 1+na$ »

Initialisation :

$(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité :

Supposons propriété vraie au rang p.

P_p est vraie donc $(1+a)^p \geq 1+pa$.

$a > 0$ donc $1+a > 0$ et par suite :

$(1+a)(1+a)^p \geq (1+a)(1+pa) \Leftrightarrow (1+a)^{p+1} \geq 1+a+pa+pa^2 \Leftrightarrow (1+a)^{p+1} \geq 1+(p+1)a+pa^2$

Or $p \geq 0$ donc $pa^2 \geq 0$ et donc $1+(p+1)a+pa^2 \geq 1+(p+1)a$.

Par suite, $(1+a)^{p+1} \geq 1+(p+1)a$ donc P_{p+1} est vraie.

La propriété P_n est donc vraie pour tout entier naturel n , et donc $(1+a)^n \geq 1+na$.

Exercice 2

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \dfrac{4n^2+3n-1}{2n+1}-2n+3 = \dfrac{4n^2+3n-1-(2n-3)(2n+1)}{2n+1}$

   $= \dfrac{4n^2+3n-1-4n^2-2n+6n+3}{2n+1} = \dfrac{7n+2}{2n+1} = \dfrac{7n(1+\frac{2}{7n})}{2n(1+\frac{1}{2n})} = \dfrac{7(1+\frac{2}{7n})}{2(1+\frac{1}{2n})}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{7n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{7n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{2n} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7(1+\frac{2}{7n})}{2(1+\frac{1}{2n})} = \dfrac{7}{2}$, par quotient de limites.

2. $u_n = \dfrac{n^2+5n+7}{2-n} = \dfrac{n^2(1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2})}{n(\frac{2}{n}-1)} = \dfrac{n(1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2})}{\frac{2}{n}-1}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{7}{n^2} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{7}{n^2}) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n}-1 = -1$. On en déduit, par quotient de limites, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3. Pour tout entier n , $(-1)^n \leq 1$ donc $u_n \leq 1-n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-n = -\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

4. $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3\times\frac{1-0}{1-\frac{1}{4}} = 4$.

Remarque : Ici u_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{4}$.

<u>Exercice 3</u>

1. $u_1 = u_0^2 - 2u_0 + 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{2\times3}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{12}{4} + \frac{8}{4} = \frac{5}{4}$.
   $u_2 = u_1^2 - 2u_1 + 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{2\times5}{4} + 2 = \frac{25}{16} - \frac{40}{16} + \frac{32}{16} = \frac{17}{16}$.
2. a) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - u_n + 2$ et $(u_n-2)(u_n-1) = u_n^2 - u_n + 2$ donc $u_{n+1} - u_n = (u_n-2)(u_n-1)$.
   b) $1 \le u_n \le 2$ donc $u_n - 2 \le 0$ et $u_n - 1 \ge 0$. Par suite $(u_n-2)(u_n-1) \le 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \le 0$.
   c) $u_{n+1} - u_n \le 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.
   Par ailleurs, la suite (u_n) est minorée car $1 \le u_n$. La suite (u_n) est donc convergente. Cette seule propriété ne permet pas de déterminer sa limite.

<u>Exercice 4</u> (3 *points*)

1. Pour tout $n > 0$, $-1 \le \cos n \le 1$ et par suite $\frac{2n-1}{n} \le u_n \le \frac{2n+1}{n}$. Or,
   $\frac{2n-1}{n} = \frac{n(2-\frac{1}{n})}{n} = 2 - \frac{1}{n}$ et, de même, $\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$ et le théorème des gendarmes permet donc de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
   La proposition est donc **vraie**.
2. La suite de terme générale $v_n = 2 + \frac{1}{n}$ constitue un contre-exemple.
   La proposition est **fausse**.
3. La suite de terme générale $w_n = 2 - \frac{1}{n}$ constitue un contre-exemple.
   La proposition est **fausse**.

<u>Exercice 5</u>

Partie A

On obtient la suite de valeurs suivantes :

k	p	u
	2	5
1	2	1
2	2	$-0{,}5$

On obtient donc le nombre $-0{,}5$ en sortie.

Partie B

1. On peut par exemple modifier l'algorithme comme ceci :

Variables	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée	Demander la valeur de p
Traitement	Affecter à u la valeur 5 Afficher u Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0{,}5u+0{,}5(k-1)-1{,}5$ Fin de pour
Sortie	Afficher u

2. On a $u_3=-0{,}75$ et $u_4=-0{,}375$ donc $u_4>u_3$ et la suite (u_n) n'est pas décroissante.

3. Soit P_n la proposition : $u_{n+1}>u_n$.

   Initialisation :

   $u_4>u_3$ donc la proposition P_3 est vraie.

   Hérédité :

   Supposons la proposition P_p vraie, on a alors $u_{p+1}>u_p$.

   $u_{p+2}=0{,}5u_{p+1}+0{,}5(p+1)-1{,}5=0{,}5u_{p+1}+0{,}5p-1{,}5+0{,}5$. comme $u_{p+1}>u_p$, on a alors $u_{p+2}>0{,}5u_p+0{,}5p-1{,}5+0{,}5 \Leftrightarrow u_{p+2}>u_{p+1}+0{,}5 \Rightarrow u_{p+2}>u_{p+1}$.

   La proposition P_{p+1} est donc vraie.

   On a prouvé que pour tout $n\geq 3$, $u_{n+1}>u_n$.

   On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 3 .

4. $v_{n+1}=0{,}1u_{n+1}-0{,}1(n+1)+0{,}5=0{,}1(0{,}5u_n+0{,}5n-1{,}5)-0{,}1n-0{,}1+0{,}5$

   $=0{,}05u_n+0{,}05n-0{,}15-0{,}1n+0{,}4=0{,}05u_n-0{,}05n+0{,}25$

   $=0{,}5(0{,}1u_n+0{,}1n+0{,}5)=0{,}5v_n$.

   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}5$. On a alors $v_n=v_0q^n$.

   $v_0=0{,}1u_0-0{,}1\times 0+0{,}5=0{,}1\times 5+0{,}5=1$ donc $v_n=0{,}5^n$

5. $v_n=0{,}1u_n-0{,}1n+0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}1u_n=v_n+0{,}1n-0{,}5 \Leftrightarrow u_n=10v_n+n-5$

   On a donc $u_n=10\times 0{,}5^n+n-5$.

6. $0{,}5\in]-1\,;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}5^n=0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ et, par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.