

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Nombres complexes et suites

Le 17 octobre 2014

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.

Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (12 points)

Toutes les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}i - (-2 + 3i)$

c) $(\sqrt{3} - 5i)^2$

b) $z_2 = (2 - 15i)\overline{(-8 + i)}$

d) $\frac{1 - 5i}{4 - 3i}$

2. Le nombre z s'écrit sous la forme algébrique $z = x + iy$ avec x et y deux réels.

Si $z \neq i$, on pose $Z = \frac{z+1}{z-i}$.

Déterminer la forme algébrique de Z en fonction de x et y .

3. On veut résoudre l'équation à coefficients réels $(E) : z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = 0$.

a) Vérifier que 1 est une solution de l'équation (E) .

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z , on ait
$$z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z-1)(z^2 + az + b).$$

c) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation (E) .

4. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit A , B et C les points d'affixes respectives a , b et c où $a = 1$, $b = 2 + 2i$ et $c = 1 - i$.

a) Placer les points dans le plan complexe.

b) Déterminer le module et un argument de $\frac{c}{b}$. En déduire la nature du triangle OBC .

c) Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier.

d) On donne le point D d'affixe 2. Quelle est la nature du quadrilatère $OCDB$?

Exercice 2 (8 points) Antilles-Guyane, juin 2014

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n \end{cases}$$

1. a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

- b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .
2. a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a $u_n > \frac{15}{4} \times 0,5^n$.
- b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .
Soit (v_n) la suite définie sur \mathbf{N} par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.
- a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n) .
- b) En déduire, que pour tout entier naturel n , $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$.
- c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0,01$.

Entrée	n et u sont des nombres
Initialisation	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2
Traitement	Tant que ... (1) n prend la valeur ... (2) u prend la valeur ... (3) Fin Tant que
Sortie	Afficher n