Corrigé du D.S. n°2

Exercice 1

1. a) $z_1 = -\frac{2}{3}+\frac{3}{2}i-(-2+3i) = -\frac{2}{3}+\frac{3}{2}i+2-3i = \frac{4}{3}-\frac{3}{2}i$.

   b) $z_2 = (2-15i)\overline{(-8+i)} = (2-15i)(-8-i) = -16-2i+120i+15i^2 = -31+118i$.

   c) $(\sqrt{3}-5i)^2 = (\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\times 5i+(5i)^2 = 3-25-10\sqrt{3}i = -22-10\sqrt{3}i$.

   d) $\frac{1-5i}{4-3i} = \frac{(1-5i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{4+15-20i+3i}{16+9} = \frac{19-17i}{25}$

2. $Z = \frac{z+1}{z-i} = \frac{x+iy+1}{x+iy-i} = \frac{x+1+iy}{x+i(y-1)} = \frac{(x+1+iy)(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))}$

   $= \frac{x(x+1)+y(y-1)-i(x+1)(y-1)+ixy}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2+x-y+i(xy-xy+x-y+1)}{x^2+y^2-2y+1}$

   $= \frac{x^2+y^2+x-y+i(x-y+1)}{x^2+y^2-2y+1}$.

   Donc $\mathrm{Re}(Z) = \frac{x^2+y^2+x-y}{x^2+y^2-2y+1}$ et $\mathrm{Im}(Z) = \frac{x-y+1}{x^2+y^2-2y+1}$.

3. a) $1^3-7\times1^2+19\times1-13 = 1-7+19-13 = 0$ donc 1 est solution de (E) .

   b) $(z-1)(z^2+az+b) = z^3+-z^2+az^2-az+bz-b = z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$.

   Par identification, on doit donc résoudre le système $\begin{cases} a-1=-7 \\ b-a=19 \\ -b=-13 \end{cases}$ qui amène à $a=-6$ et

   $b=13$. Donc $z^3-7z^2+19z-13 = (z-1)(z^2-6z+13)$.

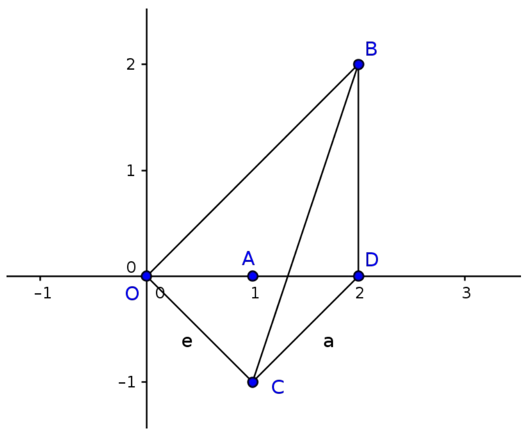
   c) L'équation (E) se ramène à $(z-1)(z^2-6z+13)=0$ donc $z-1=0 \Leftrightarrow z=1$ ou

   $z^2-6z+13=0$. Pour cette dernière équation du second degré, $\Delta = 6^2-4\times13 = -16$.

   L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées, $z_1 = \frac{6-i\sqrt{16}}{2} = 3-2i$ et

   $z_2 = \frac{6+i\sqrt{16}}{2} = 3+2i$. Donc $S=\{1;3-2i;3+2i\}$.

4. a)



   b) $\frac{c}{b} = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{1-i}{2(1+i)} = \frac{(1-i)^2}{2(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{2(1^2+1^2)} = \frac{-i}{2}$.

   Donc $\left|\frac{c}{b}\right| = \left|\frac{-i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ et $arg(\frac{c}{b}) = arg(\frac{-i}{2}) = arg(-i) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

c) $arg(\frac{c}{a}) = arg(c) = arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$ (car $1-i = \sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4}))$)

$arg(\frac{c}{a}) = \frac{1}{2}arg(\frac{c}{b})$ donc $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ donc (OA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$ du triangle OBC.

d) $z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = 2-(1-i) = 1+i = \frac{1}{2}z_B$. Or $z_B = z_{\overrightarrow{OB}}$ donc $z_{\overrightarrow{CD}} = \frac{1}{2}z_{\overrightarrow{OB}}$ et on peut affirmer que (OB) et (CD) sont parallèles. $OCDB$ est donc un trapèze.

Exercice 2

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

1. a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b) La suite (u_n) semble décroissante à partir de $n = 2$.

2. a) Soit P_n la proposition : $u_n > \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$.

Initialisation :

$u_1 = 3{,}4$ et $\frac{15}{4}\times 0{,}5^1 = \frac{15}{8} = 1{,}875$ donc $u_1 > \frac{15}{4}\times 0{,}5^1$ et la proposition P_1 est vraie.

Hérédité :

Supposons la proposition P_p vraie, on a alors $u_p > \frac{15}{4}\times 0{,}5^p$ donc $\frac{1}{5}u_p > \frac{3}{4}\times 0{,}5^p$.

$\frac{1}{5}u_p+3\times 0{,}5^p > \frac{3}{4}\times 0{,}5^p+3\times 0{,}5^p \Leftrightarrow u_{p+1} > (\frac{3}{4}+3)\times 0{,}5^p \Leftrightarrow u_{p+1} > (\frac{15}{4})\times 0{,}5^p$. Or $0{,}5 < 1$ donc $0{,}5^p > 0{,}5^{p+1}$ et donc $u_{p+1} > (\frac{15}{4})\times 0{,}5^{p+1}$ et la proposition P_{p+1} est vraie.

On a prouvé que pour tout $n \geq 1$ P_n est vraie c'est-à-dire $u_n > \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$.

b) $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{5}u_n+3\times 0{,}5^n-u_n = -\frac{4}{5}u_n+3\times 0{,}5^n = -\frac{4}{5}(u_n-\frac{15}{4}\times 0{,}5^n)$. On a montré que si $n \geq 1$ alors $u_n > \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$ donc $u_n-\frac{15}{4}\times 0{,}5^n > 0$ et donc $u_{n+1}-u_n < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang $n = 1$.

c) pour $n > 1$, $\frac{15}{4}\times 0{,}5^n > 0$ et $u_n > \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$ donc $u_n > 0$. La suite (u_n) est décroissante (à partir de $n = 1$) et minorée donc elle est convergente.

3. a) $v_{n+1} = u_{n+1}-10\times 0{,}5^{n+1} = \frac{1}{5}u_n+3\times 0{,}5^n-5\times 0{,}5^n = \frac{1}{5}u_n-2\times 0{,}5^n$

$= \frac{1}{5}(u_n-10\times 0{,}5^n) = \frac{1}{5}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

$v_0 = u_0-10\times 0{,}5^0 = 2-10 = -8$.

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -8$ donc

$v_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$. $v_n = u_n - 10\times 0{,}5^n$ donc $u_n = v_n + 10\times 0{,}5^n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0{,}5^n$.

c) $-1 < \frac{1}{5} < 1$ et $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(par produits et somme de limites)

4.

Entrée	n et u sont des nombres
Initialisation	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2
Traitement	Tant que $u > 0{,}01$ n prend la valeur $n+1$ u prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3\times 0{,}5^{n-1}$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

Remarque : La troisième ligne peut aussi être « u prend la valeur $u = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0{,}5^n$ »