DEVOIR SURVEILLÉ N° 3	
Limites, continuité et théorème des valeurs intermédiaires	***Le 9 novembre 2015***

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 *(4 points)*

Entourer la réponse exacte :

1. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=$

   0 $+\infty$ forme indéterminée aucune des trois réponses précédentes

2. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=$

   0 $+\infty$ forme indéterminée aucune des trois réponses précédentes

3. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-g(x)]=$

   0 $+\infty$ forme indéterminée aucune des trois réponses précédentes

4. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)=$

   0 $+\infty$ forme indéterminée aucune des trois réponses précédentes

5. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=10$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=$

   0 $+\infty$ forme indéterminée aucune des trois réponses précédentes

6. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-3$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=$

   0 $+\infty$ forme indéterminée aucune des trois réponses précédentes

7. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-g(x)]=$

   0 $+\infty$ forme indéterminée aucune des trois réponses précédentes

8. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)=$

   0 $+\infty$ forme indéterminée aucune des trois réponses précédentes

Exercice 2 *(6 points)*

1. Déterminer les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - \frac{1}{x})$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{3}{\sqrt{2x-5}})$; c) $\lim\limits_{x \to 0} (x - 5 + \frac{3}{\sqrt{x}})$.

2. Soit la fonction f définie sur $]-3\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1-5x}{x-3}$.

   a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle une asymptote ?
   b) Déterminer la limite de la fonction f en 3. La courbe C_f admet-elle une asymptote ?

3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x^2 + 1$.
   a) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
   b) Déterminer, en détaillant, la limite de la fonction g en $-\infty$.

Exercice 3 *(5 points)*

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin(\frac{1}{2x+7})$.

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2+4} - x$.
   a) Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.
   b) Démontrer que, pour tout réel x , $h(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$.
   c) En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

3. Soit la fonction k définie sur $]0\,;+\infty[$ par $k(x) = x\cos(\frac{1}{x})$.

   Déterminer, en justifiant, les limites de la fonction k aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 4 (2 *points*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x < -2 \\ kx + 1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$.

Déterminer le réel k pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (3 *points*)

x	-3		4		7
$f(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

Déterminer le nombre de solutions de l'équation (justifier en citant le théorème utilisé) :

1. $f(x) = 0$.
2. $f(x) = -2$.