Corrigé du D.S. n°3

Exercice 1

1. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=$
   Forme indéterminée
2. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=$
   Aucune des trois réponses précédentes
3. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-g(x)]=$
   Forme indéterminée
4. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)=$
   Forme indéterminée
5. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=10$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=$
   0
6. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-3$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=$
   $+\infty$
7. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-g(x)]=$
   $+\infty$
8. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)=$
   0

Exercice 2

1. a) $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$ donc, par somme de limites, $\lim_{x\to-\infty} (x^2-\frac{1}{x})=+\infty$.
   b) $\lim_{x\to-\infty} 2x-5=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}=+\infty$ donc, par composition, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x-5}=+\infty$ et par suite $\lim_{x\to-\infty} (\frac{3}{\sqrt{2x-5}})=0$.
   c) $\lim_{x\to 0} x-5=-5$. $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}=0^+$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{3}{\sqrt{x}}=+\infty$ et par suite $\lim_{x\to 0} (x-5+\frac{3}{\sqrt{x}})=+\infty$.
2. a) sur $]-3\,;+\infty[$, $x+3>0$ donc $\lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} x+3=0^+$ de plus, $\lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} 1-5x=16$ donc, par quotient de limites, $\lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)=+\infty$.

   $f(x)=\frac{1-5x}{x-3}=\frac{x(\frac{1}{x}-5)}{x(1-\frac{3}{x})}=\frac{\frac{1}{x}-5}{1-\frac{3}{x}}$ or $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$ donc, par sommes et quotient de limites, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-5$.

3. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   b) $g(x) = x^3+x^2+1 = x^3(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3} = 0$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Exercice 3

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+7 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2x+7} = 0$. $\lim\limits_{x\to0} \sin x = \sin 0 = 0$ (la fonction sinus est continue) donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin(\frac{1}{2x+7}) = 0$.

2. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+4 = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4} = +\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

   b) $h(x) = \sqrt{x^2+4}-x = \frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}+x} = \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$.

   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4}+x = +\infty$ et, par quotient de limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

3. Pour tout x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc, pour tout $x > 0$, $-x \leq x\cos(\frac{1}{x}) \leq x$. Par ailleurs, on a $\lim\limits_{x\to0} -x = \lim\limits_{x\to0} x = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to0} k(x) = 0$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \cos x = \cos 0 = 1$ (la fonction cosinus est continue) donc, par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(\frac{1}{x}) = 1$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$.

Exercice 4

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<2}} x^2-x+1 = 4+2+1 = 7$ et $f(-2) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>2}} kx+1 = -2k+1$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ si $-2k+1 = 7 \Leftrightarrow k = -3$.

Exercice 5

1. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-3;4]$. De plus, $0\in[-3;2]$.
   Donc, d’après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l’équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $[-3;4]$.
   Sur $[4;7]$, $f(x) \leq -1$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'as pas de solution.
   Donc l’équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

2. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-3;4]$. De plus, $-2\in[-3;2]$.
   Donc, d’après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l’équation $f(x) = -2$ admet une seule solution sur $[-3;4]$.
   La fonction f est continue et strictement croissante sur $[4;7]$. De plus, $-2\in[-3;-1]$.
   Donc, d’après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l’équation $f(x) = -2$ admet une seule solution sur $[4;7]$.
   Donc l’équation $f(x) = 0$ admet deux solutions.