DEVOIR SURVEILLÉ N° 5	
Nombres complexes et fonction exponentielle	***Le 18 janvier 2016***

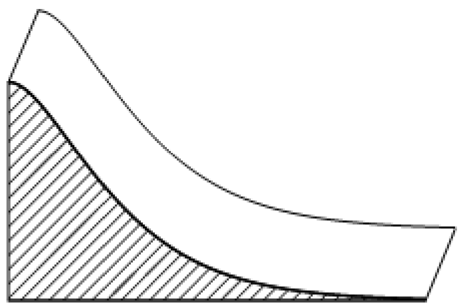
Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (6 points)
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat doit cocher la case correspondante. ***Justifier votre réponse****.*

	Réponse a	Réponse b	Réponse c
1) Pour tout réel $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x}$ est égal à	e^x	0	$1+e^{-2x}$
2) Pour tout réel x positif	$e^x>1$	$e^{-x}\geq 1$	$e^{-x}\leq 1$
3) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e\times e^{(x^2)}=e^{-x}$	$S=\{-1\}$	$S=\varnothing$	$S=\{-1\,;\,0\}$
4) La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-2x+5}$ est égale à	$f(x)$	$5f(x)$	$-2f(x)$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}-x+1\right)$	$-\infty$	0	$+\infty$
6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$	0	$+\infty$	1

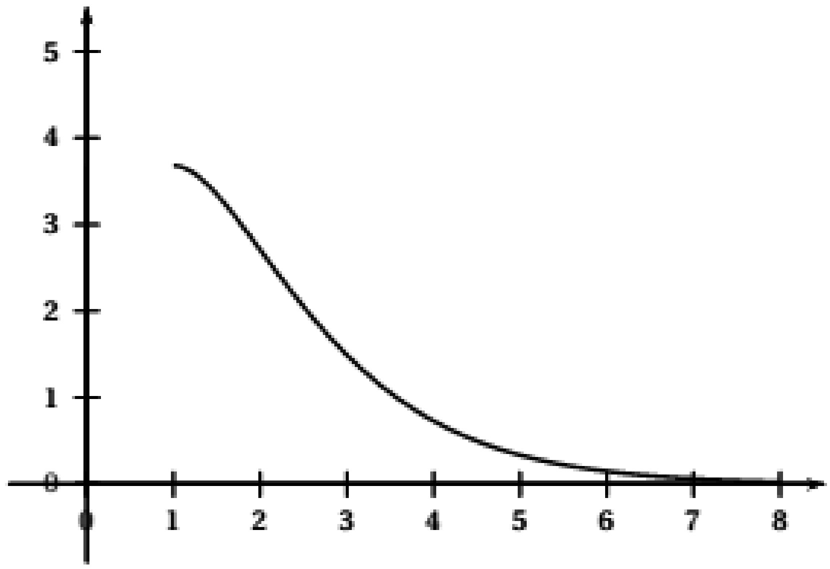
Exercice 2 (8 *points*) Polynésie, mai 2015

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.
Voici ce schéma :



Partie A : Modélisation

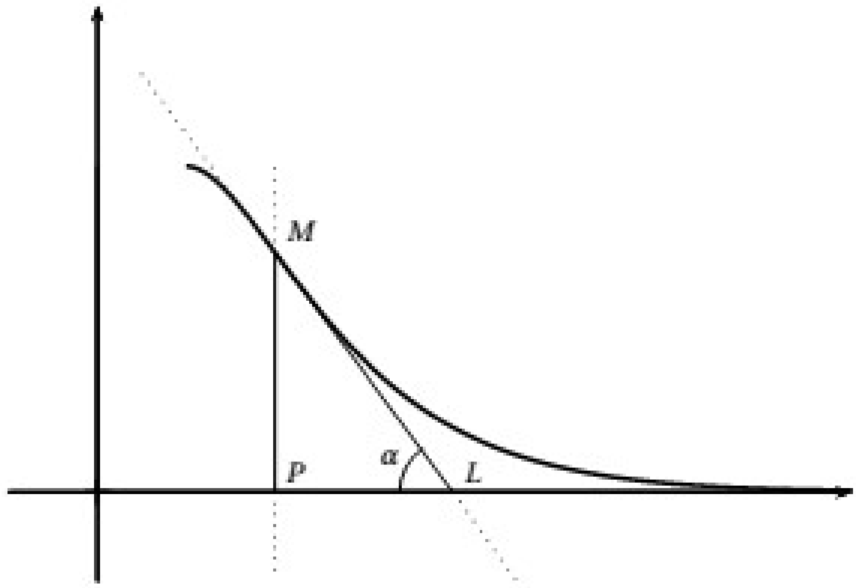
Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;8]$ par $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ où a et b sont deux entiers naturels.
La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
   Déterminer la valeur de l'entier b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre $3{,}5$ et 4 mètres de haut.
   Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B : Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan. On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses. La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1;8]$.
   a) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1;8]$, $f'(x) = 10(1-x)e^{-x}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1;8]$.
2. Soit x un réel de l'intervalle $[1;8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$.
   Justifier que $\tan\alpha = |f'(x)|$.
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

Exercice 3 (6 *points*) Métropole, juin 2015

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z : $z^2-8z+64=0$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

2. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a=4+4i\sqrt{3}$, $b=4-4i\sqrt{3}$ et $c=8i$.
   a) Calculer le module et un argument du nombre a .
   b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b .
   c) Montrer que les points A , B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
   d) Placer les points A , B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2. d) complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A' , B' et C' d'affixes respectives $a'=a\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, $b'=b\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c'=c\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   a) Montrer que $b'=8$.
   b) Calculer le module et un argument du nombre a' .

Pour la suite on admet que $a'=-4+4i\sqrt{3}$ et $c'=-4\sqrt{3}+4i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.
   a) On note r , s et t les affixes des milieux respectifs R , S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.
   Calculer r et s . On admet que $t=(2-2\sqrt{3})+i(2+2\sqrt{3})$.
   b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.


MOI, J'ESSAIE TOUJOURS D'EN DONNER UN MAXIMUM
NE ME DITES PAS MERCI
C'EST UN MINIMUM