Corrigé du D.S. n°5

Exercice 1

1. $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x}\frac{e^x}{e^x}+\frac{e^{-x}}{e^x} = 1+e^{-x-x} = 1+e^{-2x}$. **Réponse c**

2. $x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -x \leq 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} \leq e^0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} \leq 1$. **Réponse c**

3. $e \times e^{(x^2)} = e^{-x} \;\Leftrightarrow\; e^{x^2+1} = e^{-x} \;\Leftrightarrow\; x^2+1 = -x \;\Leftrightarrow\; x^2+x+1 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = -3$ et l'équation n'a donc pas de solution. **Réponse b**

4. $f(x) = e^u(x)$ avec $u(x) = -2x+5$ donc $f'(x) = u'(x) \times e^u(x) = -2f(x)$. **Réponse c**

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} -Xe^X = 0$, donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-x} - x+1) = -\infty$. **Réponse a**

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. Cours, il s'agit de la dérivée de la fonction exponentielle en 1. **Réponse c**

Exercice 2

1. $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = ax+b$ donc $u'(x) = a$ et $v(x) = e^{-x}$ donc $v'(x) = -e^{-x}$.
   On a alors $f'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = ae^{-x}+(ax+b)(-e^{-x}) = (-ax-b+a)e^{-x}$.
   Pour que la tangente au point d'abscisse 1 soit horizontale, on doit avoir
   $f'(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; (-a-b+a)e^{-x} = 0 \;\Leftrightarrow\; be^{-x} = 0 \;\Leftrightarrow\; b = 0$

2. La hauteur du haut du toboggan est donnée par $f(1) = ae^{-1} = \frac{a}{e}$.
   $3{,}5 \leq f(1) \leq 4 \;\Leftrightarrow\; 3{,}5 \leq \frac{a}{e} \leq 4 \;\Leftrightarrow\; 3{,}5e \leq a \leq 4e$. $3{,}5e \approx 9{,}5$ et $4e \approx 10{,}9$. Comme a est entier, on a donc $a = 10$ et par suite $f(x) = 10xe^{-x}$.

Partie B

1. a) $f'(x) = (-ax-b+a)e^{-x} = (-10x+10)e^{-x} = 10(1-x)e^{-x}$.
   b) Pour tout x , $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$. Sur $[1;8]$, $1-x \leq 0$ donc f est décroissante sur $[1;8]$.

2. Le point $L(x_L;0)$ appartient à la droite d , tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(x_M; f(x_M))$.
   L'équation de d est $y = f'(x_M)(x-x_M)+f(x_M)$ donc $0 = f'(x_M)(x_L-x_M)+f(x_M)$ et par suite $f'(x_M) = \frac{-f(x_M)}{x_L-x_M}$ et donc $|f'(x_M)| = \frac{|f(x_M)|}{|x_L-x_M|} = \frac{MP}{ML} = \tan\alpha$.

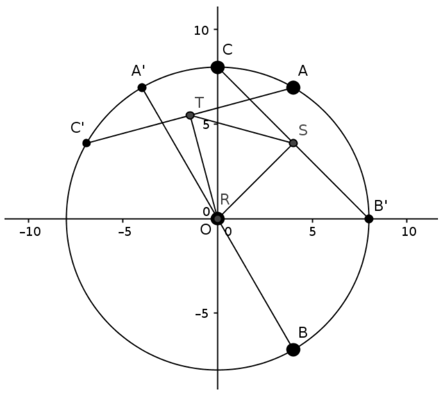
3. Il faut chercher la valeur minimale de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;8]$.
   On a $f''(x) = 10(-e^{-x}-(1-x)e^{-x}) = 10(x-2)e^{-x}$. $f''(x)$ est du signe de $x-2$, donc f'' est négative sur $[1;2]$ et positive sur $[2;8]$. Par suite f' est décroissante sur $[1;2]$ et croissante sur $[2;8]$ et donc atteint son minimum pour $x = 2$ ce qui correspond au maximum de $|f'(x)|$ puisque $f'(x) < 0$.

On a $f'(2) = -10e^{-2} \approx 1{,}35$ et $\tan\alpha \approx 1{,}35 \Leftrightarrow \alpha \approx 53{,}5\,°$. Le toboggan est donc conforme aux contraintes.

Exercice 3

1. L'équation du second degré $z^2-8z+64 = 0$ a pour discriminant
$\Delta = (-8)^2-4\times64 = -192 < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées,
$z_1 = \dfrac{8+i\sqrt{192}}{2} = 4+4i\sqrt{3}$ et $z_1 = \dfrac{8-i\sqrt{192}}{2} = 4-4i\sqrt{3}$.

2. a) $|a| = \sqrt{4^2+4\sqrt{3}^2}$. $\dfrac{a}{|a|} = \dfrac{4+4i\sqrt{3}}{8} = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\dfrac{\pi}{3}$ est un argument de a .
b) $a = 8(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = 4-4i\sqrt{3} = \bar{a} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
c) $OA = |a|$, $OB = |b|$ et $OC = |c|$. Or $|a| = |b| = |c| = 8$ donc A , B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 8 .
d)



3. a) $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{3}} = 8e^0 = 8$.
b) $|a'| = |ae^{i\frac{\pi}{3}}| = |a|\times|e^{i\frac{\pi}{3}}| = |a| = 8$ et
$\arg(a') = \arg(ae^{i\frac{\pi}{3}}) = \arg(a)+\arg(e^{i\frac{\pi}{3}}) = \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

4. a) $r = \dfrac{a'+b}{2} = \dfrac{-4+4i\sqrt{3}+4-4i\sqrt{3}}{2} = 0$.
et $s = \dfrac{b'+c}{2} = \dfrac{8+8i}{2} = 4+4i$.
b) Le triangle RST semble équilatéral.
On a $RS = |s-r| = |4+4i| = 4\sqrt{2}$.
$ST = |t-s| = |2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})-4-4i| = |-2-2\sqrt{3}+i(-2+2\sqrt{3})|$
$= \sqrt{(-2-2\sqrt{3})^2+(-2+2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+8\sqrt{3}+4\times3+4-8\sqrt{3}+4\times3} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
$TR = |r-t| = |0-(2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3}))| = |-2+2\sqrt{3}+i(-2-2\sqrt{3})|$
$= \sqrt{(-2+2\sqrt{3})^2+(-2-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4-8\sqrt{3}+4\times3+4+8\sqrt{3}+4\times3} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
$RS = ST = TR$ donc RST est effectivement un triangle équilatéral.