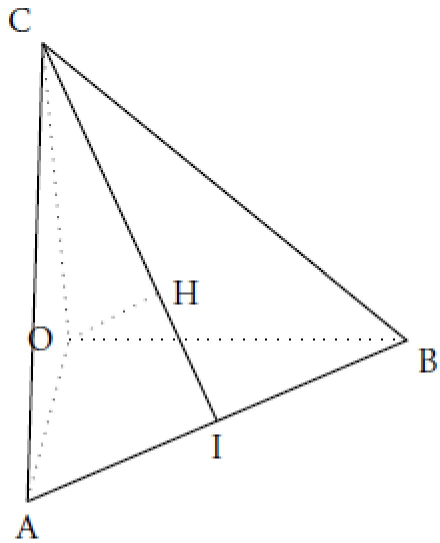
DEVOIR SURVEILLÉ N° 6	
Droites et plans dans l'espace, lois à densité et calcul d'aires	***Le 21 mars 2016***

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (6 *points*)



Soient a un réel strictement positif et $OABC$ un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.
   En déduire que (OH) est orthogonale au plan (ABC).
3. Calcul de OH
   a) Exprimer en fonction de a, le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $OABC$, puis l'aire $\mathcal{S}$ du triangle ABC.
   b) Exprimer OH en fonction de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{S}$, en déduire que $OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 2 (5 points)

Madame Baute a commandé des chaussures sur un site Internet.
Le jour de la livraison, elle reçoit un SMS lui signifiant que son colis sera livré assurément entre 10h00 et 12h00.
On note X l'heure à laquelle elle reçoit son colis.

1. Quelle loi uniforme suit la variable aléatoire X ?
2. Quelle est la probabilité pour que son colis arrive avant 10h15 ?
3. Quelle est la probabilité pour que son colis arrive entre 10h30 et 11h00 ?
4. Sachant qu'à 11h15, elle n'a toujours pas reçu son colis, quelle est la probabilité pour qu'elle le reçoive avant 11h30 ?
5. Quelle est l'heure moyenne à laquelle elle reçoit son colis ?

Exercice 3 (5 points)

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à $0{,}3$.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.
2. À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de $0{,}5$?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0{,}4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. Quelle est la durée de vie moyenne d'un robot ?

Exercice 4 (4 points)

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;16]$ par $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(x+1)+1-\cos(x)$.

Dans un repère du plan $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on note C_f et C_g les courbes représentatives des Fonctions f et g.

Ces courbes sont données ci-dessous.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.