# Corrigé du D.S. n°6

## Exercice 1

1. Les triangles $OAB$ , $OBC$ et $OCA$ sont isocèles rectangles en $O$ et $OA = OB = OC = a$ donc $AB = BC = CA = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$ et le triangle $ABC$ est donc équilatéral.

2. $(OC)$ est perpendiculaire aux deux droites sécantes $(OA)$ et $(OB)$ donc $(OC)$ est orthogonale au plan $(OAB)$ . Par suite, la droite $(OC)$ est orthogonale à la droite $(AB)$ du plan $(OAB)$ .
   $I$ est le pied de la hauteur issue de $C$ du triangle $ABC$ donc $(IC)$ est perpendiculaire à $(AB)$ .
   $(AB)$ est donc orthogonale aux deux droites sécantes $(OC)$ et $(IC)$ , elle est donc orthogonale au plan $(OIC)$ et donc aussi à la droite $(OH)$ du plan $(OIC)$ .
   $H$ est le pied de la hauteur issue de $O$ du triangle $OIC$ , donc $(OH)$ est perpendiculaire à $(IC)$ .
   $(OH)$ est orthogonale aux deux droites sécantes $(IC)$ et $(AB)$ du plan $(ABC)$ , donc $(OH)$ est orthogonale au plan $(ABC)$ .

3. a) $OABC$ est une pyramide de base $OAB$ et de hauteur $OC$ . L'aire de $OAB$ est $\frac{a\times a}{2}$ donc le volume de $OABC$ est $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\frac{a^2}{2}\times a = \frac{a^3}{6}$ .
   La hauteur d'un triangle équilatéral de côté $c$ est $\frac{c\sqrt{3}}{2}$ donc $CI = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ et par suite l'aire de $ABC$ est $\mathcal{S} = \frac{AB\times CI}{2} = \frac{a\sqrt{2}\times a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
   b) $OABC$ est aussi une pyramide de base $ABC$ et de hauteur $OH$ , donc $\mathcal{V} = \frac{s\times OH}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\times OH$ .
   On a donc $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\times OH = \frac{a^3}{6}$ et par suite, $OH = \frac{a^3}{a^{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

## Exercice 2

1. Pour que la fonction $f$ soit la densité d'une loi uniforme sur $[10\,;12]$ , $f$ doit être une fonction constante et on doit avoir $\int_{10}^{12} f(t)\,dt = 1$ . En posant $f(t) = c$ , on a $\int_{10}^{12} c\,dt = 1 \Leftrightarrow 2c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ .

2. Il s'agit de déterminer $p(X \leq 10{,}25)$ . $p(X \leq 10{,}25) = \int_{10}^{10{,}25} \frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ .

3. Il s'agit de déterminer $p(10{,}5 < X \leq 11)$ . $p(10{,}5 < X \leq 11) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

4. Il s'agit de déterminer $p_{(X>10,25)}(X \le 11,5)$. $p_{(X>10,25)}(X \le 11,5) = \dfrac{p(10,25 < X \le 11,5)}{p(X > 10,25)}$.
   Or, $p(X > 10,25) = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$ et $p(10,25 < X \le 11,5) = \dfrac{(11,5 - 10,25) \times 1}{2} = \dfrac{5}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{8}$ donc
   $p_{(X>10,25)}(X \le 11,5) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{8}{7} = \dfrac{5}{7}$.

**Exercice 3**

1. La durée de vie du robot, $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ donc $p(X > 6) = e^{-6\lambda}$.
   On a alors $e^{-6\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow -6\lambda = \ln 0,3 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-\ln 0,3}{6} \approx 0,2$.

2. A un instant $t$, la probabilité qu'un robot soit déjà tombé en panne est $p(X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$. On doit donc résoudre $1 - e^{-\lambda t} = 0,5$.
   $1 - e^{-\lambda t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0,5 \Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln 0,5}{\lambda} = \dfrac{\ln 2}{0,2} \approx 3,466$.

   La probabilité qu'un robot soit déjà tombé en panne est donc de $0,5$ au d'environ 3 ans et 6 mois.

3. La probabilité qu'un robot n'ai pas eu de panne au cours des deux premières années est
   $p(X > 2) = e^{-2\lambda} = e^{-0,4}$.

4. $X$ suit une loi exponentielle, donc $p_{(X>2)}(X > 6) = p(X > 6-2) = p(X > 4)$.
   $p(X > 4) = e^{-4\lambda} = e^{-0,8} \approx 0,45$.
   La probabilité qu'un robot soit toujours en marche au bout de 6 ans sachant qu'il est en marche au bout de 2 ans est de $0,45$.

5. $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,2} = 5$. La durée de vie moyenne d'un robot est de 5 ans.

**Exercice 3**

Les abscisses respectives $x_A$ et $x_B$ des points $A$ et $B$ vérifient l'équation $f(x) = g(x)$.
Or $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, où $k$ est un entier.
Comme $x_A \in [6;7]$ et $x_B \in [12;13]$, on a $x_A = 2\pi$ et $x_B = 4\pi$.
Les aires des surfaces hachurées sont donc, pour la première :

$$\int_0^{2\pi} g(x)\,dx - \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos x)\,dx$$

et pour la seconde :

$$\int_{2\pi}^{4\pi} g(x)\,dx - \int_{2\pi}^{4\pi} f(x)\,dx = \int_{2\pi}^{4\pi} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{2\pi}^{4\pi} (1 - \cos x)\,dx.$$

Or la fonction cosinus est periodique de période $2\pi$ donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} (1 - \cos x)\,dx = \int_{2\pi}^{4\pi} (1 - \cos x)\,dx$.

Par suite les deux surfaces ont même aire.