Corrigé du D.S. n°7

Exercice 1

I est le milieu de $[CG]$ donc $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$ et par suite, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$.

Comme $ABCDEFGH$ est un cube, on a donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

De la même façon, on a $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GH}$ donc $\overrightarrow{HK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HG}$ et par suite, on aura $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

Cherchons s'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{AI}+b\overrightarrow{AJ}$. Cette équation équivaut à

$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE} = a(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})+b(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$

$\Leftrightarrow$ $(\frac{2}{3}-a)\overrightarrow{AB}+(1-a-\frac{1}{2}b)\overrightarrow{AD}+(1-\frac{1}{2}a-b)\overrightarrow{AE} = \vec{0}$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires, cette équation équivaut à $\frac{2}{3}-a = 0$, $1-a-\frac{1}{2}b = 0$ et $1-\frac{1}{2}a-b = 0$ ce qui amène à $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$. On a alors $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont coplanaires et par suite, les points A , I , J et K le sont aussi.

Remarque : On peut aussi montrer que les droites (AJ) et (IK) sont sécantes en un point M vérifiant $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DH}$.

Exercice 2

1. On peut prendre $\vec{u}(-3;2;-1)$.
2. Il s'agit de résoudre l'équation $4 = 1-3t$ qui donne $t = -1$. Pour $t = -1$ on obtient dans la représentation paramétrique le point $A(4;-4;0)$ ce qui répond à la question.
3. Il s'agit de résoudre le système $\begin{cases} -10 = 1-3t \\ \frac{16}{3} = -2+2t \\ -\frac{14}{3} = -1-t \end{cases}$. La première équation donne $t = \frac{11}{3}$ et cette valeur satisfait les deux autres équations. Le système a donc pour solution $t = \frac{11}{3}$ et le point B appartient à la droite Δ .

Exercice 3

1. a) $(O,\vec{u};\vec{v})$ définit un plan si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. . On a $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = 0$ et $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = 1$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $(O,\vec{u};\vec{v})$ définit effectivement un plan.

b) Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels $\overrightarrow{OM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$, pour tous réels k et k' . Ceci amène à $\begin{cases} x = k \\ y = k + k' \\ z = k' \end{cases}$ qui est donc une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.

2. $\mathcal{D}$ passe par $A(2;1;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{w}(1;1;1)$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est donc $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$. Chercher l'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$ revient donc à résoudre le système $\begin{cases} k = 2+t \\ k+k' = 1+t \\ k' = t \end{cases}$. En remplaçant t par k' dans la seconde équation on obtient $k = 1$ puis on en déduit $k' = t = -1$. Ceci amène à $x = 1$, $y = 0$ et $z = -1$.
L'intersection $\mathcal{D}$ de et de $\mathcal{P}$ est donc le point $M(1;0;-1)$.

Exercice 4

1. En partant à 11h16, le livreur doit mettre moins de 44 minutes pour arriver à l'heure. On doit donc chercher $p(X < 44)$ et $p(Y < 44)$.
X suit la loi normale $(\mathcal{N}(41;25))$ et pour cette loi, on obtient, grâce à la calculatrice $p(X < 44) \approx 0{,}726$.
Y suit la loi normale $(\mathcal{N}(43;4))$ et pour cette loi, on obtient $p(Y < 44) \approx 0{,}691$.
Il est donc préférable de choisir le trajet A pour ne pas arriver en retard.
2. En partant à 11h15, le livreur doit mettre moins de 45 minutes pour arriver à l'heure.
On a alors $p(X < 45) \approx 0{,}788$ et $p(Y < 45) \approx 0{,}841$.
Dans ce cas, il est donc préférable de choisir le trajet B.

Exercice 5

1. X suit la loi normale de d'espérance μ et d'écart-type 2 donc $Y = X - \mu$ suit la loi normale de paramètres 0 et 4. On cherche μ pour que $p(X > 83) = 0{,}01$ c'est-à-dire $p(X \leq 83) = 0{,}99$.
Or, $p(X \leq 83) = p(Y < 83-\mu)$ et, comme Y suit la loi $(\mathcal{N}(0;4))$, la calculatrice nous donne la valeur $y_0 \approx 4{,}65$ telle que $p(Y \leq y_0) = 0{,}99$. On a donc $83-\mu = y_0$ et donc $\mu = 83 - y_0 \approx 83 - 4{,}65 \approx 78{,}35$. On doit donc régler la machine sur 78,35 cℓ.
2. a) X suit la loi normale $(\mathcal{N}(78{,}35;4))$ et on a alors $p(X < 75) \approx 0{,}047$.
b) 0,047 équivaut à 4,7 % et la législation n'est donc pas respectée.

Exercice 6

1. Chaque salarié peut-être soit malade (succès) soit bien portant avec une probabilité constante et indépendamment les uns des autres. l'état de santé des 220 salariés de l'entreprise suit donc un schéma de Bernoulli et le nombre de salariés malade suit une loi binomiale de paramètres 220 et 0,05.

2. a) X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(220\,;0{,}05)$ donc $\mu = n\,p = 220\times0{,}05 = 11$ et $\sigma = \sqrt{n\,p(1-p)} = \sqrt{220\times0{,}05\times0{,}095} = \sqrt{10{,}45} \approx 3{,}23$.

b) On a $n = 220 > 30$, $n\,p = 11 > 5$ et $n(1-p) = 209 > 5$ donc on peux utiliser une approximation de la loi binomiale par un loi normale de même espérance et écart-type. C'est-à-dire $(\mathcal{N}(11\,;10{,}45))$.

3. $p(7 < X < 15) = p(\frac{7-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{15-\mu}{\sigma}) = p(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{15-\mu}{\sigma}) - p(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{7-\mu}{\sigma})$.

On a $\frac{7-\mu}{\sigma} \approx -1{,}24$ et $\frac{15-\mu}{\sigma} \approx 1{,}24$ et par suite, par lecture du tableau on obtient $p(7 < X < 15) \approx 0{,}892 - 0{,}108 \approx 0{,}784$.

Remarque : Pour corriger l'approximation due au passage du discret au continu il aurait été pertinent de considérer $p(6{,}5 < X < 15{,}5)$ avec l'utilisation de la loi normale.