DEVOIR SURVEILLÉ N° 4	
Devoir « type Bac »	*Le 9 décembre 2015*

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (5 *points*)

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production.
Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.
On note :

- M l'événement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- O l'événement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- I l'événement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- F l'événement : « le personnel interrogé est une femme » ;

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
2. Calculer la probabilité d'interroger :
   a) un agent de maintenance ;
   b) une femme agent de maintenance ;
   c) une femme.

Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue. Des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002 ;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003 ;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- A l'événement : « l'alarme se déclenche » ;
- B l'événement : « une panne se produit ».

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.
2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

Exercice 2 (5 *points*)

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$.

1. Calculer d_1 et a_1.
2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
   L'algorithme suivant est proposé :

Variables:	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 saisir la valeur de n

Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	    D prend la valeur $\frac{D}{2}+100$
	    A prend la valeur $\frac{A}{2}+\frac{D}{2}+70$
	Fin pour

Sortie :	Afficher A Afficher D

   a) Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour n`=` 1 ?
   Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1 ?

   b) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. a) Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
   Montrer que la suite (e_n) est géométrique.
   b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.
   c) La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n, $a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$.

   a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geq (n+1)^2$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geq n^2$.

   c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$.

   d) Étudier la convergence de la suite (a_n).

Exercice 3 (4 *points*)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2+4z+3$.

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe $z = x+iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble (E).

Exercice 4 (6 *points*)

1. On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x^3-4x^2+2x-1$.
   a) Déterminer u', la fonction dérivée de u, puis dresser le tableau de variation de la fonction u. On donne $u(\frac{1}{3}) = -\frac{19}{27}$. (On ne demande pas de calculer les limites en l'infini.)
   b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.
   c) À l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer un encadrement à 10^{-4} près de α.
   On donnera le nombre de boucles nécessaires à cet encadrement.
   d) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x) = x^2+\dfrac{1}{x-1}$.
   a) Déterminer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1.
   b) Déterminer f' la fonction dérivée de f et montrer que : $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(x-1)^2}$.
   c) Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}-\{1\}$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
   d) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\mathbb{R}-\{1\}$.
   Donner un encadrement à 10^{-2} près de β.
   e) Calculer $\lim\limits_{x \to +¿\infty} (f(x)-x^2)$.
   Pourquoi peut-on dire que la parabole d'équation $y = x^2$ est asymptote à C_f ?