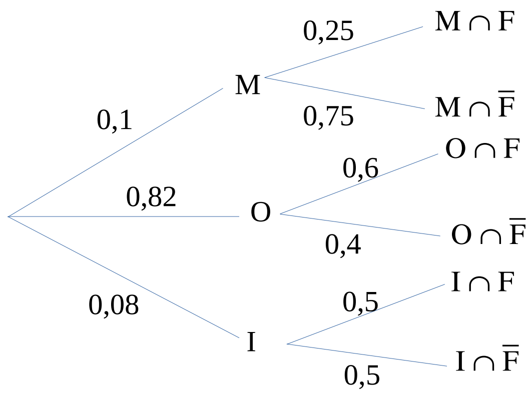
Corrigé du type bac n°1

<u>Exercice 1</u>

PARTIE A

1.



2. a) Il s'agit de déterminer $p(M)$. Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production donc $100-8-82=10\%$ d'agents de maintenance donc $p(M)=0,1$.

   b) Il s'agit de déterminer $p(M\cap F)$. $p(M\cap F)=p(M)\times p_M(F)=0,1\times 0,25=0,025$.

   c) Il s'agit de déterminer p(F). O, I et M forment une partition de l'univers donc
   $p(F)=p(M)\times p_M(F)+p(O)\times p_O(F)+p(I)\times p_I(F)=0,1\times 0,25+0,82\times 0,6+0,08\times 0,5$
   $=0,557$

PARTIE B

1. Il s'agit de déterminer $p(A\cap B)$. A et $\bar{A}$ forment une partition donc
   $p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap\bar{A})$ et donc $p(B\cap A)=p(B)-p(B\cap\bar{A})=0,04-0,003=0,037$.

2. $p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\bar{B})=0,037+0,002=0,039$.
   La probabilité que l'alarme se déclenche est de $0,039$.

3. Il s'agit de déterminer $p_A(B)$. $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=\dfrac{0,037}{0,039}\approx 0,95$.

<u>Exercice 2</u>

1. $d_1=\frac{1}{2}d_0+100=\frac{300}{2}+100=250$ Et $a_1=\frac{1}{2}d_0+\frac{1}{2}a_0+70=\frac{300}{2}\frac{450}{2}+70=445$.

2. a) On va effectuer la boucle une fois donc D prend la valeur $\frac{D}{2}+100=\frac{300}{2}+100=250$ et
   A prend la valeur $\frac{A}{2}+\frac{D}{2}+70=\frac{450}{2}+\frac{250}{2}+70=420$. Ces résultats ne sont donc pas cohérents avec ceux de la question 1 pour la valeur de a_1.

   b) On peut par exemple échanger la position des lignes « D prend la valeur $\frac{D}{2}+100$ » et « A prend la valeur $\frac{A}{2}+\frac{D}{2}+70$ » pour que le calcul de D ne fausse pas celui de A.

3. a) $e_{n+1}=d_{n+1}-200=\frac{1}{2}d_n+100-200=\frac{1}{2}d_n-100=\frac{1}{2}(d_n-200)=\frac{1}{2}e_n$ donc la suite (e_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) (e_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $e_n = e_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$e_0 = d_0 - 200 = 300 - 200 = 100$ donc $e_n = 100\left(\frac{1}{2}\right)^n$. $e_n = d_n - 200$ donc

$d_n = e_n + 200 = 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200$

c) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. et donc, par somme, $\lim_{n\to+\infty} d_n = 200$ et (d_n) est donc convergente.

4. a) Pour tout n non nul, $(n+1)^2 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times n^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times n^2$. Si $n \geq 3$ alors $1 < 1+\frac{1}{n} \leq \frac{4}{3}$ et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^2 < 2$ donc $(n+1)^2 < 2n^2$ ce qui répond à la question.

b) Soit P_n la proposition « $2^n \geq n^2$ ».

Initialisation :

Pour $n = 4$, $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. $2^4 \geq 4^2$ donc P_4 est vraie.

Hérédité :

Supposons P_p vraie pour un certain rang $p \geq 4$. c'est-à-dire $2^p \geq p^2$. On a alors $2^{p+1} = 2\times 2^p$ or $p \geq 4$ donc $2^p \geq n^2$ et donc $2\times 2^p \geq 2n^2$. $p \geq 3$ donc $2n^2 \geq (n+1)^2$ et par suite, $2^{p+1} \geq (n+1)^2$. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée et on peut conclure que pour tout $n \geq 4$, on a $2^n > n^2$.

c) $100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{100n}{2^n}$ or $\frac{100n}{2^n} > 0$ et, pour $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$ donc $0 \leq \frac{100n}{2^n} \leq \frac{100n}{n^2}$ et donc $0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$.

d) On a $\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{100}{n} = 0$ et, pour tout $n \geq 4$, $0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} 100\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Par ailleurs $\lim_{n\to+\infty} 110\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ($-1 < \frac{1}{2} < 1$) donc, par somme, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 340$.

Exercice 3

1. M est un point invariant si et seulement si son affixe z vérifie l'équation :

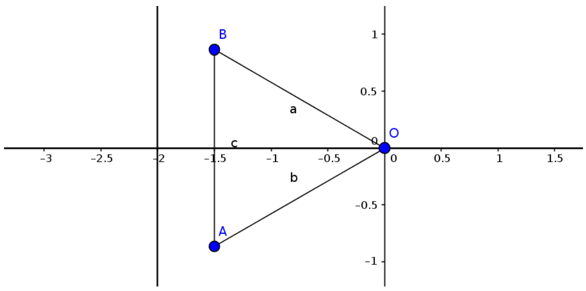
$z = z^2 + 4z + 3 \Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0$.

Pour cette équation du second degré, on a $\Delta = 3^2 - 4\times 3 = -3 < 0$ donc cette équations admet deux solutions complexes conjugués, $z_1 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$. Il existe donc deux points invariants d'affixes z_1 et z_2 .

$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$ puis $\frac{|z_1|}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$. On cherche α tel que $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ avec $\cos\alpha < 0$ ce qui amène à $\alpha = -\frac{5\pi}{6}(2\pi)$. On a donc $z_1 = \sqrt{3}(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6}))$.

De même, $|z_2| = \sqrt{3}$ puis $z_2 = \sqrt{3}(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$.

2. $OA = |z_{\overrightarrow{OA}}| = |z_1| = \sqrt{3}$, $OB = |z_{\overrightarrow{OB}}| = |z_2| = \sqrt{3}$ et $AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_2 - z_1| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ donc $OA = OB = AB$ et OAB est un triangle équilatéral.
   Remarque : On peut aussi calculer l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
3. Dire que M' est sur l'axe des réels équivaut à dire que la partie imaginaire de z' est nulle.
   $z' = z^2+4z+3 = (x+iy)^2+4(x+iy)+3 = x^2+2ixy-y^2+4x+4iy+3$
   $= x^2-y^2+4x+3+i(2xy+4y)$
   Donc M' est sur l'axe des réels si et seulement si $2xy+4y = 0 \Leftrightarrow 2y(2x+4) = 0$. donc $2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ L'ensemble (E) est donc la réunion des droites d'équation $y = 0$ et $x = -2$.
4.



Exercice 4

1. a) $u'(x) = 6x^2-8x+2 = 2(3x^2-4x+1)$. On remarque que 1 est une racine de ce trinôme et on obtient $u(x) = 2(x-1)(3x-1)$. On a donc :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	−	0	+	
$u(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{19}{27}$	↘	-1	↗	$+\infty$

   b) sur $]-\infty;1]$ le maximum de la fonction u est $-\frac{19}{27} < 0$ donc l'équation $u(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
   Sur $]1;+\infty[$ la fonction u est continue (c'est une fonction polynôme), strictement croissante et $0 \in]-1;+\infty[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ a exactement une solution sur $]1;+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$.
   $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 3 > 0$ ce qui prouve que $1 < \alpha < 2$.
   c) À l'aide de l'algorithme de dichotomie on obtient $1{,}56518 < \alpha < 1{,}56525$. Pour obtenir ce résultat 14 boucles de l'algorithme sont effectuées.

d) À l'aide du tableau de variations précédent on peut dire que $u(x) < 0$ si $x < \alpha$ et $u(x) > 0$ si $x > \alpha$.

2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x-1 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Si $x < 1$ alors $x-1 < 0$ et si $x > 1$ alors $x-1 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x-1 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} x-1 = 0^+$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ et comme $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$.

b) $$f'(x) = 2x - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1)^2-1}{(x-1)^2} = \frac{2x(x^2-2x+1)-1}{(x-1)^2} = \frac{4x^3-4x^2+2x-1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{u(x)}{(x-1)^2}.$$

c) Pour tout $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$ donc f' est du signe de u sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et on a :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

d) À l'aide d'une table on remarque que $f(-0{,}8) > 0 > f(-0{,}7)$ puis que $f(-0{,}76) > 0 > f(-0{,}75)$ donc $-0{,}76 < \beta < -0{,}75$.

e) $f(x)-x^2 = x^2+\dfrac{1}{x-1}-x^2 = \dfrac{1}{x-1}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-x^2 = 0$ (voir question1.a).

Ceci signifie que la distance entre le point d'abscisse x de la courbe et le point d'abscisse x de la parabole tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. C'est pour cette raison que l'on peut dire que la parabole d'équation $y = x^2$ est asymptote à la courbe représentative de f .