DEVOIR SURVEILLÉ N° 8	
Devoir « type Bac »	*Le 18 mai 2016*

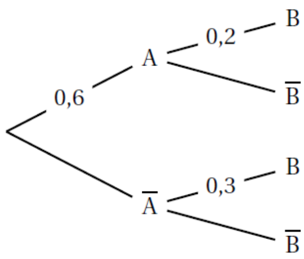
Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

<u>Exercice 1</u> (5 *points*)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 *point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

Question 1 :

On considère l'arbre de probabilités ci-contre.
Quelle est la probabilité de l'événement B ?



a) 0,12 b) 0,2 c) 0,24 d) 0,5

Question 2 :

Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires. Le temps T, en années, durant lequel un atome de césium137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$.

Quelle est la probabilité qu'un atome de césium137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

a) 0,125 b) 0,25 c) 0,75 d) 0,875

Question 3 :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 110$ et d'écart type $\sigma = 25$.
Quelle est la valeur arrondie au millième de la probabilité $p(X \geq 135)$?

a) 0,159 b) 0,317 c) 0,683 d) 0,841

Question 4 :

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois de suite. Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence d'apparition de la face pile de cette pièce ?

a) $[0{,}371\,;0{,}637]$ b) $[0{,}480\,;0{,}523]$ c) $[0{,}402\,;0{,}598]$ d) $[0{,}412\,;0{,}695]$

Question 5 :

Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95%, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05.
Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

a) 400 b) 800 c) 1 600 d) 3 200

Exercice 2 (5 *points*)

Partie A

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et soit $\mathcal{P}$ un plan.
On considère deux droites sécantes et contenues dans $\mathcal{P}$: la droite $\mathcal{D}_1$ de vecteur directeur $\vec{u_1}$ et la droite $\mathcal{D}_2$ de vecteur directeur $\vec{u_2}$.
Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$ si, et seulement si, Δ est orthogonale à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

$$A(0\,;-1\,;1),\ B(4\,;-3\,;0) \text{ et } C(-1\,;-2\,;-1).$$

On appelle $\mathcal{P}$ le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 3t-1 \\ z = -2t+8 \end{cases}$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$.
2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.
3. **Affirmation 3** : Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x+3y-2z+5=0$.
4. On appelle $\mathcal{D}$ la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}(11\,;-1\,;4)$.
   Affirmation 4 : La droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5=0$.

Exercice 3 (5 *points*)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = (1+i)z_n$.

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0 .
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
5. Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	u est un réel, p est un réel, n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p
Traitement	???
Sortie	???

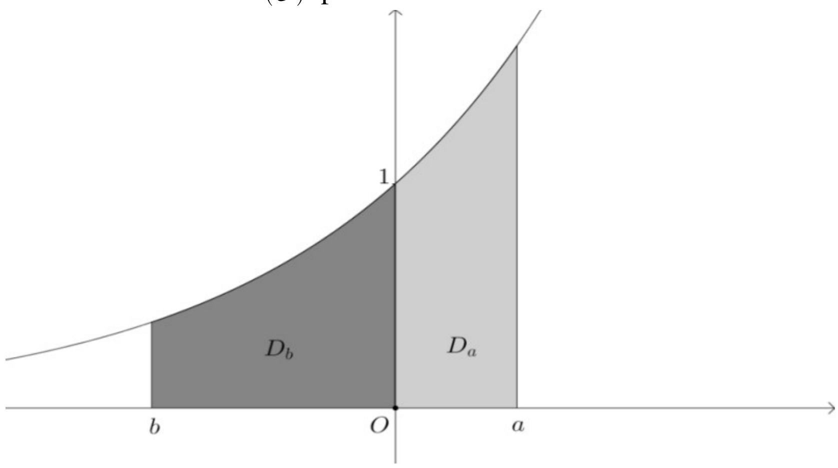
Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 .
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+i$.
3. En déduire la forme exponentielle de z_1 .
4. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 (5 *points*)

Soit a un réel strictement positif et b un réel strictement négatif.On note :

- $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$;
- D_a le domaine sous la courbe $(\mathcal{C})$ pour x entre 0 et a ;
- D_b le domaine sous la courbe $(\mathcal{C})$ pour x entre b et 0.



L'objet de l'exercice est d'étudier les couples $(a\,;b)$ tels que les aires des domaines D_a et D_b soient égales.

1. a) On suppose que le couple $(a\,;b)$ est une solution. Montrer que $e^a+e^b=2$.
   b) En utilisant le fait que $b<0$, déduire de la relation précédente qu'une condition nécessaire pour que le problème ait une solution est que : $0<a<\ln 2$.
   c) La condition obtenue dans la question 1) b) est-elle suffisante pour que le problème ait une solution ?

2. Étude de trois cas particuliers
   a) Par des considérations graphiques, prouver qu'il n'existe pas de solution $(a\,;b)$ telle que $b=-a$.
   b) En écrivant $x^3-2x^2+1=x^3-x^2-x^2+1$, factoriser ce polynôme et en déduire ses racines dans $\mathbb{R}$.
   c) Existe-t-il des couples $(a\,;b)$ solutions tels que $b=-2a$?
   d) Existe-t-il des couples $(a\,;b)$ solutions tels que $a=-2b$?