Corrigé du type bac n°2

Exercice 1

Question 1 : Réponse **c** : 0,24

Question 2 : Réponse **b** : 0,25

Question 3 : Réponse **a** : 0,159

Question 4 : Réponse **c** : $[0{,}402\,;0{,}598]$

Question 5 : Réponse **c** : 1 600

Exercice 2

Partie A

Montrons que si Δ est orthogonale à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$, alors Δ est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$.
Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$ de vecteur directeur $\vec{u}$. $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont des droites de $\mathcal{P}$ donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont coplanaires. Comme $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires et il existe deux réels a et b tels que $\vec{u}=a\,\vec{u}_1+b\,\vec{u}_2$. $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales à Δ donc $\vec{v}.\vec{u}_1=0$ et $\vec{v}.\vec{u}_2=0$ donc $\vec{v}.\vec{u}=a\,\vec{v}.\vec{u}_1+b\,\vec{v}.\vec{u}_2=0$ et par suite Δ est orthogonale à $\mathcal{D}$.
L'implication réciproque est triviale donc l'équivalence cherchée est démontrée.

Partie B

Remarque : On admet que les points A, B et C définissent bien un plan.

1. **Affirmation 1** : Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}(1\,;3\,;-2)$ et on a $\overrightarrow{AB}(4\,;-2\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;-1\,;-2)$.
   On a donc $\vec{v}.\overrightarrow{AB}=1\times4+3\times(-2)+(-2)\times(-1)=0$ et
   $\vec{v}.\overrightarrow{AC}=1\times(-1)+3\times(-1)+(-2)\times(-2)=0$ donc Δ est orthogonale à (AB) et à (AC) et Δ est donc orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et donc à toute droite de $\mathcal{P}$. **VRAI.**
2. **Affirmation 2** : Les droites Δ et (AB) n'étant pas parallèles, cherchons si elles sont sécantes.
   (AB) passe par $A(0\,;-1\,;1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(4\,;-2\,;-1)$ donc une représentation paramétrique de de (AB) est $\begin{cases}x=4t'\\y=-3-2t'\\z=1-t'\end{cases}$. Il s'agit donc de résoudre le système $\begin{cases}t=4t'\\3t-1=-3-2t'\\-2t+8=1-t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=4t'\\3t+2t'+2=0\\-2t+t'+7=0\end{cases}$. En remplaçant t par $4t'$ dans la seconde équation, on obtient $t'=-\dfrac{1}{7}$ puis $t=-\dfrac{4}{7}$. Ces valeurs ne vérifient pas la troisième équation donc le système n'a pas de solution et les droites Δ et (AB) ne sont pas sécantes. **FAUX.**
3. **Affirmation 3** : $0+3\times(-1)-2\times1+5=0$ donc les coordonnées de A vérifient l'équation $x+3y-2z+5=0$. De même pour les coordonnées de B et de C. donc l'équation $x+3y-2z+5=0$ est bien une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$. **VRAI.**

4. **Affirmation 4** : $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. Cherchons s'il existe des réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$. Il s'agit de résoudre le système $\begin{cases} 11 = 4\alpha-\beta \\ -1 = -2\alpha-\beta \\ 4 = -\alpha-2\beta \end{cases}$. La différence des deux premières équations donne $12 = 6\alpha$ donc $\alpha = 2$ puis la première équation donne $\beta = -3$. Ces valeurs vérifient les deux autres équations donc on a $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires et la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$. Or $\mathcal{D}$ passe par l'origine et $\mathcal{P}$ non ($0+3\times0-2\times0+5 \neq 0$) donc $\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$. **VRAI.**

   Remarque : On peut plus simplement montrer que que $\vec{v}.\vec{u} = 0$.

<u>Exercice 3</u>

Partie A

1. $u_0 = |z_0| = |\sqrt{3}-i| = \sqrt{(3^2+1^2)} = 2$.
2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+i)z_n| = |(1+i)|\times|z_n| = \sqrt{(1^2+1^2)}u_n = \sqrt{2}\,u_n$. Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.
3. (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2 donc $u_n = 2(\sqrt{2})^n$.
4. $\sqrt{2} > 1$ et $u_0 > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
5.

Variables	u est un réel, p est un réel, n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p

Traitement	Tant que $u < p$
	    n prend la valeur $n+1$
	    u prend la valeur $\sqrt{2}\times u$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

Partie B

1. $z_1 = (1+i)z_0 = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3}+i\sqrt{3}-i+1 = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$.
2. $z_0 = \sqrt{3}-i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}) = 2(\cos(\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{-\pi}{6}))$ donc $z_0 = 2e^{\frac{-i\pi}{6}}$.

   $|1+i| = \sqrt{(1^2+1^2)} = \sqrt{2}$ puis
   $1+i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$ donc $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
3. $z_1 = (1+i)z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$. Or $z_1 = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$ donc $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$ et donc $e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. Donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

Exercice 4

1. a) L'aire de D_a est $\int_0^a e^x dx = e^a - e^0 = e^a - 1$. Celle de D_b est $\int_b^0 e^x dx = e^0 - e^b = 1 - e^b$.

   Si les aires de D_a et de D_b sont égales, on a donc $e^a - 1 = 1 - e^b \Leftrightarrow e^a + e^b = 2$.

   b) Comme pour tout réel x , $e^x > 0$ on doit donc avoir $e^a < 2 \Leftrightarrow a < \ln 2$.

   c) Soit $a \in]0; \ln 2[$, on doit résoudre l'équation $e^a + e^b = 2$ d'inconnue b .

   $e^a + e^b = 2 \Leftrightarrow e^b = 2 - e^a$. Comme $e^a < 2$, $2 - e^a > 0$ et on a $b = \ln(2 - e^a)$. Par ailleurs, $a > 0$ donc $e^a > 1$ puis $2 - e^a < 1$ et donc $b < 0$. La condition $a \in]0; \ln 2[$ est donc une solution suffisante pour que le problème ait une solution.

2. a) Le domaine D_b est strictement inclus dans un rectangle de largeur $-b$ et de hauteur 1 donc l'aire de D_b est strictement inférieure à $-b$.

   Le domaine D_a contient strictement un rectangle de largeur a et de hauteur 1 donc l'aire de D_a est strictement supérieure à a . Si $a = -b$, les deux aires ne peuvent donc pas être égales.

   b) $x^3 - 2x^2 + 1 = x^3 - x^2 - x^2 + 1 = x^2(x-1) - (x-1)(x+1) = (x-1)(x^2 - x - 1)$.

   Pour le trinôme $x^2 - x - 1$, $\Delta = 5$ puis $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Par ailleurs, $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ donc les racines de $x^3 - 2x^2 + 1$ sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et 1.

   c) Si le couple $(a; -2a)$ est solution de problème, on a donc $e^a + e^{-2a} = 2$ (et réciproquement) ce qui équivaut à $e^{2a} e^a + 1 = 2e^{2a} \Leftrightarrow e^{3a} - 2e^{2a} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^a)^3 - 2(e^a)^2 + 1 = 0$ et e^a est donc une racine du polynôme $x^3 - 2x^2 + 1$.

   $e^a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ n'est pas possible car $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.

   $e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $a > 0$.

   $e^a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow a = \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ et comme $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62 < 2$ c'est donc une solution valable au problème.

   d) De la même façon que pour la question 2.a), il n'existe pas de couple $(a; b)$ solution avec $a = -2b$, on a nécessairement $-b > a$.