Corrigé du bac blanc

Exercice 1

1. $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ puis $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1+i)^4 = \sqrt{2}^4 e^{4i\frac{\pi}{4}} = 4e^{i\pi}$. **Réponse b**.

2. $|z-1+i| = |\sqrt{3}-1| \Leftrightarrow |z-(1-i)| = 2$. L'ensemble considéré est donc le cercle de centre le point d'affixe $1-i$ et de rayon 2 . Son équation en coordonnée cartésiennes est donc $(x-1)^2+(y+1)^2 = 2^2$ ce qui correspond à la **réponse c**.

3. On a $u_n = |z_n|$ donc $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}z_n\right| = \left|\frac{1+i}{2}\right|\times|z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n$. (u_n) est donc une suite géométrique de raison q telle que $|q|<1$. (u_n) est donc convergente. **Réponse c**.

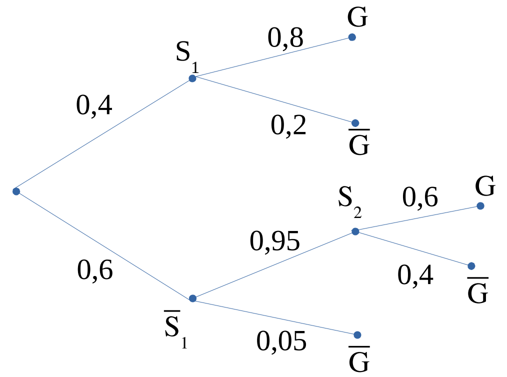
4. $Z = \frac{z_C-Z_A}{z_B-z_A} = \frac{1+5i-(-1-i)}{2-2i-(-1-i)} = \frac{2+6i}{3-i} = \frac{2i(3-i)}{3-i} = 2i$. Or $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = arg\left(\frac{z_C-Z_A}{z_B-z_A}\right)$ donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = arg(2i) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$. Donc ABC est rectangle en A . **Réponse c**.

5. Pour l'équation (E), on a $\Delta = (2a)^2-4(a^2+1) = -4$ donc l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées, donc de même module. **Réponse c**.

6. Nommons A le point d'affixe 1 , B le point d'affixe 2 et M le point d'affixe z . On a $AM = |z-1| = |1+e^{i\theta}-1| = |e^{i\theta}| = 1$ donc M , comme O et B appartiennent au cercle de centre A et de rayon 1 . On a alors $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}) = arg(z)$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}) = arg\left(\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\right) = arg(e^{i\theta}) = \theta(2\pi)$. La propriété des angles inscrits et des angles au centre nous amène à $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})$ et donc $arg(z) = \frac{\theta}{2}$. **Réponse d**.

Exercice 2

Partie A



1. Voir ci-contre

2. $p(S_1\cap G) = p(S_1)\times p_{S_1}(G) = 0{,}4\times0{,}8 = 0{,}32$.

3. $p(G) = p(S_1\cap G)\cup p(S_2\cap G)$. Or
$p(S_2\cap G) = p(S_2)\times p_{S_2}(G)$ et
$p(S_2) = p(\overline{S_1})\times p_{\overline{S_1}}(S_2) = 0{,}6\times0{,}95 = 0{,}57$
donc $p(S_2\cap G) = 0{,}57\times0{,}6 = 0{,}342$ puis
$p(G) = 0{,}32+0{,}342 = 0{,}662$.

4. Il s'agit de déterminer $p_G(S_1)$.
$p_G(S_1) = \frac{p(S_1\cap G)}{p(G)} = \frac{0{,}32}{0{,}662} \approx 0{,}483$

Partie B

1. On répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire à deux issues. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli et X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. $X_n = n$ équivaut à obtenir uniquement pile sur les n lancers. Donc, $p(X_n = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. a) Les événements $Y_n = 100$ et $X_n = n$ sont équivalents, donc $p(Y_n = 100) = p(X_n = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   b) $E(Y_n) = -1 \times p(Y_n = -1) + 100 \times p(Y_n = 100) = -(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) + 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 101 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$.

3. a) $E(Y_n) < 0 \Leftrightarrow 101 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{101} \Leftrightarrow \ln(\left(\frac{1}{2}\right)^n) < \ln(\frac{1}{101})$ ce qui amène à $\ln(\left(\frac{1}{2}\right)^n) < \ln(\frac{1}{101}) \Leftrightarrow n\ln(\left(\frac{1}{2}\right)) < -\ln(101) \Leftrightarrow -n\ln(2) < -\ln(101) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(101)}{\ln(2)}$. Or $\frac{\ln(101)}{\ln(2)} \approx 6{,}7$ et comme n est entier on obtient $E(Y_n) < 0 \Leftrightarrow n \geq 7$.

   b) L'espérance de gain n'est positive pour le joueur que si n est inférieur à 7. Le joueur n'a donc intérêt à jouer que dans ces conditions.

<u>Exercice 3</u> (obligatoire)

1. La fonction $\ln$ est croissante, donc il en est de même pour la fonction $n \rightarrow 4{,}329\ln(n)$ puis de $n \rightarrow 4{,}329\ln(n)+70$ ce qui répond à la question.

2. $d_{10n} - d_n = 4{,}329\ln(10n)+70-(4{,}329\ln(n)+70) = 4{,}329(\ln(10)+\ln(n)) - 4{,}329\ln(n)$
   $= 4{,}329\ln(10) \approx 9{,}97$.

   On peut donc dire que lorsqu'on multiplie par 10 le nombre d'appareils, le nombre de décibels augmente environ de 10.

3. a) $d_{40} = 4{,}239\ln(40)+70 \approx 86$

   b) Le bruit généré par les 40 appareils est supérieur à $85\,dB$ donc l'employé est dans son droit par rapport au règlement.

4. a) $d_n \leq 85 \Leftrightarrow 4{,}329\ln(n)+70 \leq 85 \Leftrightarrow 4{,}329\ln(n) \leq 15 \Leftrightarrow \ln(n) \leq \frac{15}{4{,}329} \Leftrightarrow n \leq e^{\frac{15}{4{,}329}}$.

   Or, $e^{\frac{15}{4{,}329}} \approx 31{,}98$ et comme $n \in \mathbb{N}$, on a $d_n \leq 85 \Leftrightarrow n \leq 31$.

   b) On peut placer au maximum 31 appareils dans ce local pour que le bruit n'excède pas $85\,dB$.

5. Le premier algorithme ne convient pas car il est formé d'un branchement conditionnel au lieu d'une boucle et n ne sera donc augmenté de 1 qu'une seule fois et 2 sera affiché en sortie.

   Le deuxième algorithme ne convient pas car la condition est inversée et sera fausse pour $N = 1$. On ne rentre pas dans la boucle et 1 sera affiché en sortie.

   Le troisième algorithme affiche le premier entier pour lequel la condition est fausse. Il s'agit donc de 32 ce qui n'est pas la valeur cherchée.

   L'algorithme correct est donc l'algorithme n°4.

6. L'algorithme suivant convient :

Initialisation	Affecter la valeur 0,5 à N
Traitement	Tant que $8{,}68\ln(N)+93{,}28 \leq 120$ $N+0{,}1 \rightarrow N$ Fin du tant que $N-0{,}1 \rightarrow N$
Sortie	Afficher N

<u>Exercice 3</u> (spécialité)

1. $u_1 = \dfrac{u_0+v_0}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{u_0+2v_0}{3} = \dfrac{0+2\times 1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

2. a) On obtient les résultats suivants :

k	w	u	v
1	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{3}$
2	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{7}{12}$	$\dfrac{11}{18}$

b) Les valeurs affichées en sortie de l'algorithme sont u_N et v_N .

3. a) $A\,X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

b) Soit P_n la proposition : $X_n = A^n X_0$.

$A^0 = I_2$ donc $A^0 X_0 = X_0$ et P_0 est vraie.

Supposons que la proposition P_k soit vraie, c'est-à-dire $X_k = A^k X_0$. On a alors $X_{k+1} = A\,X_k = A\,A^k X_0 = A^{k+1} X_0$ donc la proposition P_{k+1} est vraie et comme P_0 est vraie, on peut alors affirmer que P_n est vraie pour tout entier naturel n donc $X_n = A^n X_0$.

4. a) $PP' = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{5} & -\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{6}{5} \\ \frac{1}{2}\times(-\frac{6}{5})+\frac{1}{2}\times\frac{6}{5} & -\frac{1}{2}\times(-\frac{6}{5})+\frac{1}{3}\times\frac{6}{5} \end{pmatrix} = I_2$.

Soit P_n la proposition : $A^n = P'B^nP$.

$A^0 = I_2$ et $P'B^0P = P'I_2P = P'P = I_2$ donc $A^0 = P'B^0P$ et P_0 est vraie.

Supposons que la proposition P_k soit vraie, c'est-à-dire $X_k = A^k X_0$. On a alors $A^{k+1} = A\,A^k = P'B\,P\,P'B^k P = P'B\,I_2 B^k P = P'B\,B^k P = P'B^{k+1}P$ donc la proposition P_{k+1} est vraie et comme P_0 est vraie, on peut alors affirmer que P_n est vraie pour tout entier naturel n donc $A^n = P'B^nP$.

b) $A^n = P'B^nP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\times\frac{1}{6^n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\times\frac{1}{6^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{6^n} & \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{6^n} \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\times\frac{1}{6^n} & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$.

5. $X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{6^n} & \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{6^n} \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\times\frac{1}{6^n} & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{6^n} \\ \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$. Comme $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on a alors $u_n = \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{6^n}$ et $v_n = \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6^n}$.

b) $6 > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 6^n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6^n} = 0$ et par suite, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{6^n} = \frac{3}{5}$ et de même, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{5}$.

<u>Exercice 4</u>

Partie A

1. On a $f(x) = xe^{1-x^2} = x\frac{e}{e^{x^2}} = \frac{e}{x}\times\frac{x^2}{e^{x^2}}$. Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{e}{x} = 0$ et par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$. On a alors, par produit, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. a) $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^{1-x^2}$ donc $v'(x) = -2xe^{1-x^2}$. Par suite, $f'(x) = 1\times e^{1-x^2}+x\times(-2x)e^{1-x^2} = (1-2x^2)e^{1-x^2}$.

b) La fonction exponentielle étant strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $1-2x^2$. Or $1-2x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et on a

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{\sqrt{2e}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2e}}{2}$	↘	0

Partie B

1. La courbe C_f semble être toujours en dessous de la courbe C_g et ne la toucher qu'au point de coordonnées $(1;1)$.

2. Pour $x \in]-\infty, 0]$, $f(x) \leq 0$ car, l'exponentielle étant strictement positive, $f(x)$ est du signe de x. Pour la même raison, $g(x) > 0$ donc $f(x) < g(x)$ sur $]-\infty, 0]$.

3. a) $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x e^{1-x^2} < e^{1-x} \Leftrightarrow \ln(x e^{1-x^2}) \leq \ln(e^{1-x})$ (Car sur $]0;+\infty[$, f et g sont positives) donc $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \ln(x)+\ln(e^{1-x^2}) \leq \ln(e^{1-x}) \Leftrightarrow \ln(x)+1-x^2 \leq 1-x$ et on a $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \ln(x)-x^2+x \leq 0 \Leftrightarrow \phi(x) \leq 0$.

b) $\phi'(x) = \dfrac{1}{x}-2x+1 = \dfrac{-2x^2+x+1}{x}$. Pour le trinôme $-2x^2+x+1$, $\Delta = 9$ puis $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. Le trinôme est positif entre ses racines donc il est positif sur $]0;1]$ et négatif sur $[1;+\infty[$. Comme $x > 0$, ϕ' est du signe de ce trinôme et on a :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

c) Le maximum de la fonction ϕ est 0 donc $\phi(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

4. a) Sur $]0;+\infty[$, $\phi(x) \leq 0$ donc $f(x) \leq g(x)$. Comme $f(x) \leq g(x)$ sur $]-\infty,0]$ aussi, $f(x) \leq g(x)$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ est toujours en dessous de $\mathcal{C}_g$.

b) Sur $]-\infty,0]$, $f(x) < g(x)$ donc les deux courbes n'ont pas de point commun.

Sur $]0;+\infty[$, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \phi(x) = 0$ qui n'est réalisé que pour $x = 1$. Le seul point commun aux deux courbes est donc le point $A(1;1)$.

c) On a $f(1) = g(1)$ et de plus, $f'(1) = (1-2\times1^2)e^{1-1^2} = -1$ et $g'(x) = -e^{1-x}$ donc $g'(1) = -1$. $f(1) = g(1)$ et $f'(1) = g'(1)$ donc les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont la même tangente au point A.