DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Suites et démonstration par récurrence	*Le 27 septembre 2016*

Exercice 1 (2 *points*)

On admettra l'inégalité de Bernoulli : « Soit un réel a strictement positif. Pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1+na$ ».

1. Démontrer que pour $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4^n}{3^n+1}$.

Exercice 2 (4 *points*)

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

1) $u_n = \dfrac{n^2+5n+7}{2-n}$ 2) $u_n = 2-n+(-1)^n$ 3) $u_n = \sin(\sqrt{n})-n^2$

Exercice 3 (4 *points*)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n{}^2-2u_n+2$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, $1 < u_n < 2$.
   a. Montrer que $u_{n+1}-u_n = (u_n-2)(u_n-1)$.
   b. Déterminer le signe de $u_{n+1}-u_n$.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. Peut-on déduire sa limite ?

Exercice 4 (3 *points*)

Pour chacune des informations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse. **Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point**.

1. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{2n+\cos n}{n}$ est convergente vers 2.
2. Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante, converge vers 0.
3. Toute suite (w_n) croissante diverge vers $+\infty$.

Exercice 5 (7 *points*)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n$.

1. a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

   b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .
2. a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a
   $u_n > \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n < 0$.
   c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n) .
   Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n) .
   b) En déduire, que pour tout entier naturel n , $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n < 0{,}01$.

Entrée	n et u sont des nombres
Initialisation	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2
Traitement	Tant que ... (1) n prend la valeur ... (2) u prend la valeur ... (3) Fin Tant que
Sortie	Afficher n