Corrigé du D.S. n°1

Exercice 1

1. Posons $a = q-1$. On a alors $q^n = (1+a)^n$. Or $q > 1$ donc $a > 0$ et d'après l'inégalité de Bernoulli, pour tout entier naturel n , $q^n \geq 1+na$.
   $a > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} na = +\infty$ (par produit) puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+na = +\infty$ (par somme)
   Comme $q^n \geq 1+na$ on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ (par comparaison)
2. $\dfrac{4^n}{3^n+1} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}$. $\dfrac{4}{3} > 1$ et $3 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. Par suite,

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$ (par inverse), $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{3^n} = 1$ (par somme), $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}} = 1$ (par inverse) et

   enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}} = +\infty$ (par produit). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4^n}{3^n+1} = +\infty$.

Exercice 2

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2+5n+7}{2-n} = \dfrac{n^2(1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{7}{n^2})}{n(\dfrac{2}{n}-1)} = \dfrac{n(1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{7}{n^2})}{\dfrac{2}{n}-1}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{7}{n^2} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{7}{n^2}) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n}-1 = -1$. On en déduit, par quotient de limites, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. Pour tout entier n , $(-1)^n \leq 1$ donc $u_n \leq 1-n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-n = -\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. Pour tout entier n , $\sin(\sqrt{n}) \leq 1$ donc $u_n \leq 1-n^2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-n^2 = -\infty$ (par somme) et donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 3

1. $u_1 = u_0^2-2u_0+2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{2\times 3}{2}+2 = \dfrac{9}{4}-\dfrac{12}{4}+\dfrac{8}{4} = \dfrac{5}{4}$.
   $u_2 = u_1^2-2u_1+2 = \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{2\times 5}{4}+2 = \dfrac{25}{16}-\dfrac{40}{16}+\dfrac{32}{16} = \dfrac{17}{16}$.
2. a) $u_{n+1}-u_n = u_n^2-2u_n+2-u_n = u_n^2-u_n+2$ et $(u_n-2)(u_n-1) = u_n^2-u_n+2$ donc $u_{n+1}-u_n = (u_n-2)(u_n-1)$.
   b) $1 \leq u_n \leq 2$ donc $u_n-2 \leq 0$ et $u_n-1 \geq 0$. Par suite $(u_n-2)(u_n-1) \leq 0$ c'est-à-dire

$u_{n+1} - u_n \leq 0$.

c) $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Par ailleurs, la suite (u_n) est minorée car $1 \leq u_n$. La suite (u_n) est donc convergente. Cette seule propriété ne permet pas de déterminer sa limite.

Exercice 4 (3 *points*)

1. Pour tout $n > 0$, $-1 \leq \cos n \leq 1$ et par suite $\frac{2n-1}{n} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{n}$. Or,

   $\frac{2n-1}{n} = \frac{n(2-\frac{1}{n})}{n} = 2-\frac{1}{n}$ et, de même, $\frac{2n+1}{n} = 2+\frac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 2-\frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ et le théorème des gendarmes permet donc de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

   La proposition est donc **vraie**.

2. La suite de terme générale $v_n = 2+\frac{1}{n}$ constitue un contre-exemple.

   La proposition est **fausse**.

3. La suite de terme générale $w_n = 2-\frac{1}{n}$ constitue un contre-exemple.

   La proposition est **fausse**.

Exercice 5

1. a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b) La suite (u_n) semble décroissante à partir du rang 1.

2. a) Soit P_n la proposition : $u_n > \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$.

   Initialisation :

   $u_1 = 3{,}4$ et $\frac{15}{4} \times 0{,}5^1 = \frac{15}{8} = 1{,}875$ donc $u_1 > \frac{15}{4} \times 0{,}5^1$ et la proposition P_1 est vraie.

   Hérédité :

   Supposons la proposition P_p vraie, on a alors $u_p > \frac{15}{4} \times 0{,}5^p$ donc $\frac{1}{5} u_p > \frac{3}{4} \times 0{,}5^p$.

   $\frac{1}{5} u_p + 3 \times 0{,}5^p > \frac{3}{4} \times 0{,}5^p + 3 \times 0{,}5^p \Leftrightarrow u_{p+1} > (\frac{3}{4}+3) \times 0{,}5^p \Leftrightarrow u_{p+1} > (\frac{15}{4}) \times 0{,}5^p$. Or $0{,}5 < 1$ donc $0{,}5^p > 0{,}5^{p+1}$ et donc $u_{p+1} > (\frac{15}{4}) \times 0{,}5^{p+1}$ et la proposition P_{p+1} est vraie.

   On a prouvé que pour tout $n \geq 1$ P_n est vraie c'est-à-dire $u_n > \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$.

   b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - u_n = -\frac{4}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n = -\frac{4}{5}(u_n - \frac{15}{4} \times 0{,}5^n)$. On a montré que si $n \geq 1$ alors $u_n > \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ donc $u_n - \frac{15}{4} \times 0{,}5^n > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang $n = 1$.

c) pour $n > 1$, $\frac{15}{4} \times 0{,}5^n > 0$ et $u_n > \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ donc $u_n > 0$. La suite (u_n) est décroissante (à partir de $n = 1$) et minorée donc elle est convergente.

3. a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - 5 \times 0{,}5^n = \frac{1}{5} u_n - 2 \times 0{,}5^n$

$= \frac{1}{5}(u_n - 10 \times 0{,}5^n) = \frac{1}{5} v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

$v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = 2 - 10 = -8$.

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -8$ donc

$v_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$. $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ donc $u_n = v_n + 10 \times 0{,}5^n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.

c) $-1 < \frac{1}{5} < 1$ et $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ et par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

(par produits et somme de limites)

4.

Entrée	n et u sont des nombres
Initialisation	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2
Traitement	Tant que $u > 0{,}01$ n prend la valeur $n+1$ u prend la valeur $\frac{1}{5} u + 3 \times 0{,}5^{n-1}$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

Remarque : La troisième ligne peut aussi être « u prend la valeur $u = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$ »