DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Suites et nombres complexes	*Le 19 octobre 2016*

<u>Exercice 1</u> (6 *points*) *Liban, mai 2016*

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_A = 4+2i$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n$.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$.
   (on pourra utiliser les résultats connus sur les suites géométriques)
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

<u>Exercice 2</u> (8 *points*) *Antilles-Guyane, septembre 2014*

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On prendra comme unité $2\,cm$ sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.
On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$. Écrire sous forme trigonometriques les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit $(\mathscr{F})$ l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z) - 8| = 3$. Prouver que $(\mathscr{F})$ est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer $(\mathscr{F})$ sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
   a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est $(x^2 - y^2 + 2x + 9) + i(2xy + 2y)$.

b) On note $(\mathscr{E})$ l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel. Montrer que $(\mathscr{E})$ est la réunion de deux droites d_1 et d_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{F})$.

<u>Exercice 3</u> (6 *points*) *Asie, juin 2015*

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

1. a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + 2z + 1 = 0$.
   b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme trigonométrique.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   a) $j^3 = 1$;
   b) $j^2 = -j - 1$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.