Corrigé D.S. n°2

Exercice 1

1. a. $u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 - (4+2i) = \frac{1}{2} i \times z_n + 1 - 2i = \frac{1}{2} i \left(z_n + \frac{2(1-2i)}{i}\right)$

   Or $\frac{2(1-2i)}{i} = \frac{-2i(1-2i)}{-i^2} = -4 - 2i = -z_A$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{2} i (z_n - z_A) = \frac{1}{2} i u_n$.

   b. $u_{n+1} = \frac{1}{2} i u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} i$ et de premier terme $u_0 = z_0 - z_A = -z_A = -4-2i$ donc $u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$.

2. $(\overrightarrow{AM_n}, \overrightarrow{AM_{n+4}}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM_{n+4}}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AM_n}) = arg(z_{n+4} - z_A) - arg(z_n - z_A)$

   $= arg(u_{n+4}) - arg(u_n) = arg\left(\frac{u_{n+4}}{u_n}\right)$

   (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} i$ donc $\frac{u_{n+4}}{u_n} = \left(\frac{1}{2} i\right)^4 = \frac{1}{16}$ et donc $arg\left(\frac{u_{n+4}}{u_n}\right) = 0 (2\pi)$. Ainsi, $(\overrightarrow{AM_n}, \overrightarrow{AM_{n+4}}) = 0 (2\pi)$ et les points A , M_n et M_{n+4} sont alignés.

Exercice 2

1. $f(-1+i\sqrt{3}) = (-1+i\sqrt{3})^2 + 2(-1+i\sqrt{3}) + 9 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5$.

2. $f(z) = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 4 = 0$. Pour cette dernière équation du second degré, $\Delta = 4 - 16 = -12$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées,

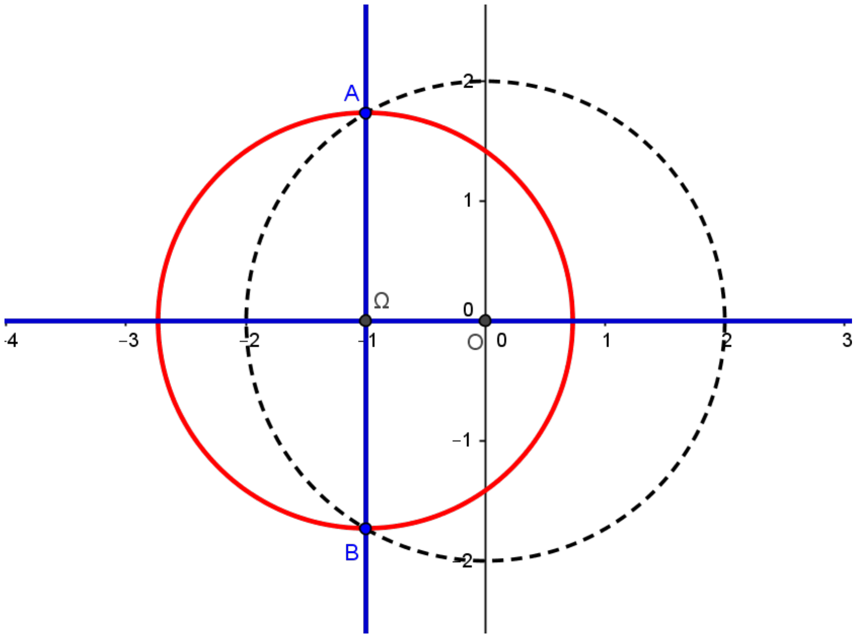
   $z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{12}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = \frac{-2 + i\sqrt{12}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$.

   $z_A = z_2 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ et

   $z_B = z_1 = \bar{z_A} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

   Comme $|z_A| = |z_B| = 2$, A et B se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon 2 .

   Comme $x_A = x_B = -1$, A et B se trouvent sur la droite d'équation $x = -1$.



3. $f(z) = \lambda \Leftrightarrow z^2+2z+9 = \lambda \Leftrightarrow z^2+2z+9-\lambda = 0$.
   L'équation du second degré $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées si $\Delta < 0$.
   Or $\Delta = 4-4(9-\lambda) = 4(\lambda-8)$. Par suite, $\Delta < 0$ équivaut à $\lambda < 8$.
   Donc l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées lorsque $\lambda < 8$.

4. $f(z)-8 = z^2+2z+9-8 = z^2+2z+1 = (z+1)^2$. Donc,
   $|f(z)-8| = 3 \Leftrightarrow |(z+1)^2| = 3 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 3 \Leftrightarrow |z+1| = \sqrt{3}$ donc $(\mathscr{F})$ est le cercle de centre Ω d'affixe $z_\Omega = -1$, c'est-à-dire $\Omega(-1;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

5. a) $$\begin{aligned} f(z) &= (x+iy)^2+2(x+iy)+9 = x^2+2ixy-y^2+2x+2iy+9 \\ &= (x^2-y^2+2x+9)+i(2xy+2y) \end{aligned}.$$
   b) $f(z)$ est un nombre réel si, et seulement si, $2xy+2y = 0$.
   $2xy+2y = 0 \Leftrightarrow 2y(x+1) = 0$ ce qui équivaut à $y = 0$ ou $x = -1$.
   Donc est la réunion des droites d_1 et d_2, d'équations respectives $y = 0$ et $x = -1$.

6. Les points d'intersection de $(\mathscr{F})$ et de la droite d_1 ont pour coordonnées $(-1-\sqrt{3};0)$ et $(-1+\sqrt{3};0)$.
   $|z_A - z_\Omega| = |-1+i\sqrt{3}+1| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ d'où A appartient à $(\mathscr{F})$.
   $|z_B - z_\Omega| = |-1-i\sqrt{3}+1| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ d'où B appartient à $(\mathscr{F})$.
   De plus, A et B appartiennent à la d_2 et il y a au plus deux points d'intersection entre une droite et un cercle donc Les points d'intersection de $(\mathscr{F})$ et de la droite d_2 ont pour coordonnées $(-1;-\sqrt{3})$ et $(-1;\sqrt{3})$.

Exercice 3

1. a) Pour l'équation du second degré $z^2+z+1 = 0$, $\Delta = 1-4 = -3$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées, $z_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   b) $z_2 = j$ ce qui répond à la question.

2. $|j| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ Puis on remarque que $-\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ donc $arg(j) = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$. On a donc $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

3. a) $|j^3| = |j|^3 = 1$ et $arg(j^3) = 3\,arg(j) = 2\pi(2\pi)$ donc $j^3 = 1$.

   b) j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$ donc $j^2+j+1=0 \Leftrightarrow j^2 = -j-1$.

   (On peut remarquer que l'on a aussi $j^2 = \overline{j}$)

4. $PQ = |j-1| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$.

   $QR = |j^2 - j| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.

   $RP = |1 - j^2| = \left|\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$.

   $PQ = QR = RP$ donc PQR est un triangle équilatéral.