| DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 | |
|---|---|
| *Limites, continuité, théorème des valeurs intermédiaires, compléments sur les fonctions numériques* | *Le 29 novembre 2016* |


**Exercice 1** (3 *points*)

On justifiera avec soin les limites demandées.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-5x+4}{x-2}\right)$.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-5}{(x-2)^2}$.
3) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\sqrt{\dfrac{3}{2-x}}$.

**Exercice 2** (3 *points*)

1) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.
    a) Rappeler la définition de la continuité en un réel $a$ d'une fonction $f$.
    b) En encadrant la fonction $f$, montrer que la fonction $f$ est continue en 0.
2) VRAI-FAUX : la proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   « Si une fonction est continue en $a$, alors la fonction est dérivable en $a$. »

**Exercice 3** (4 *points*)

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes en précisant le domaine de validité.

1) $f(x)=x+7+\dfrac{2}{x+3}$. (Factoriser la dérivée)
2) $g(x)=(3x^2-x+1)^4$.
3) $h(x)=x\sqrt{3x+1}$. (Donner la forme la plus simple possible)

**Exercice 4** (10 *points*)

1) Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ .

   a) Déterminer $u'$ , la dérivée de $u$ , puis dresser le tableau de variations de $u$ .
   (On ne demande pas de calculer les limites de $u$ en l'infini)

   b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$ , et que $1 < \alpha < 2$ .

   c) À l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer un encadrement à $10^{-4}$ de $\alpha$ .
   On donnera le nombre de boucles nécessaires à cet encadrement.

   d) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de $x$ .

2) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x-1}$ .

   a) Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ , en $-\infty$ et en 1.

   b) Démontrer que pour tout réel $x$ différent de 1, $f'(x)$ a le même signe que $u(x)$ , où $u$ est la fonction définie dans la question 1).

   c) En déduire les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ . On donne $f(\alpha) \approx 4{,}219$ .

   d) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ .
   Donner un encadrement de $\beta$ à $10^{-2}$ près.

   e) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( f(x) - x^2 \right)$ .
   Pourquoi peut-on dire que la parabole d'équation $y = x^2$ est asymptote à $C_f$ ?

3) On donne l'algorithme ci-dessous.

```
Variables : X entier
Entrées et initialisation
        X prend la valeur 2
Traitement
        tant que 1/(X−1) ≥ 10^(−3) faire
                X prend la valeur X+1
        fin
Sorties : Afficher X
```

   a) Que calcule cet algorithme ?

   b) Qu'affiche-t-il comme résultat ?