Corrigé du D.S. n°3

Exercice 1

1) $\dfrac{2x^2-5x+4}{x-2} = \dfrac{x^2(2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2})}{x(1-\frac{2}{x})} = \dfrac{x(2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2})}{1-\frac{2}{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2} = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{2}{x} = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, on en déduit, par produit et quotient de limites, que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x^2-5x+4}{x-2}\right) = -\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to2} x-5 = 2-5 = -3$ et $\lim\limits_{x\to2} (x-2)^2 = 0^+$ (car $(x-2)^2 \geq 0$ pour tout x).

Donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-5}{(x-2)^2} = -\infty$.

3) Si $x<2$ alors $2-x>0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} 2-x = 0^+$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{3}{2-x} = +\infty$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \sqrt{\dfrac{3}{2-x}} = +\infty$.

Exercice 2

1) a) Une fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

b) On sait que pour tout réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc quel que soit $x \neq 0$, $-1 \leq \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$.

Par ailleurs, $-|x| \leq x \leq |x|$ et donc, pour tout x non nul, $-|x| \leq x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq |x|$ et on a alors, pour tout réel x (même nul), $-|x| \leq f(x) \leq |x|$.

On a $\lim\limits_{x\to0} |(x)| = \lim\limits_{x\to0} -|(x)| = 0$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

Comme $f(0)=0$, f est bien continue en 0.

2) La fonction f précédente est continue en 0 mais $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Or $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0. (de même que la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$ ou $-\infty$)

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0 et constitue donc un contre-exemple. **FAUX**

Exercice 3

1) $f(x) = x+7+\dfrac{2}{u(x)}$ avec $u(x) = 2x+3$ donc $u'(x) = 2$ et on a

$$f'(x) = 1-\frac{2u'(x)}{u(x)^2} = 1-\frac{4}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+3)^2-2^2}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+3-2)(2x+3+2)}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+1)(2x+5)}{(2x+3)^2}.$$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

2) $g(x)=u(x)^4$ avec $u(x)=3x^2-x+1$ donc $u'(x)=6x-1$ et on a
$g'(x)=4u'(x)u(x)^3=4(6x-1)(3x^2-x+1)^3$. g est définie et dérivable sur sur $\mathbb{R}$.

3) $h(x)=x\sqrt{3x+1}=xu(x)$ avec $u(x)=\sqrt{v(x)}$ et $v(x)=3x+1$ donc $v'(x)=3$ puis
$u'(x)=\dfrac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}=\dfrac{3}{2\sqrt{(3x+1)}}$. On a alors
$h'(x)=1\times\sqrt{3x+1}+x\times\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}=\sqrt{3x+1}+x\dfrac{3\sqrt{3x+1}}{2(3x+1)}=\dfrac{\sqrt{3x+1}(6x+2+3x)}{2(3x+1)}=\dfrac{(9x+2)\sqrt{3x+1}}{2(3x+1)}$
h est définie sur $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ et dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

Exercice 4

1) a) $u'(x)=6x^2-8x+2=2(3x^2-4x+1)$. On remarque que 1 est une racine de ce trinôme et on obtient $u(x)=2(x-1)(3x-1)$. On a donc :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{19}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

b) sur $]-\infty;1]$ le maximum de la fonction u est $-\dfrac{19}{27}<0$ donc l'équation $u(x)=0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
Sur $]1;+\infty[$ la fonction u est continue (c'est une fonction polynôme), strictement croissante et $0\in]-1;+\infty[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x)=0$ a exactement une solution sur $]1;+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$.
$f(1)=-1<0$ et $f(2)=3>0$ ce qui prouve que $1<\alpha<2$.
c) À l'aide de l'algorithme de dichotomie on obtient $1{,}56518<\alpha<1{,}56525$. Pour obtenir ce résultat 14 boucles de l'algorithme sont effectuées.
d) À l'aide du tableau de variations précédent on peut dire que $u(x)<0$ si $x<\alpha$ et $u(x)>0$ si $x>\alpha$.

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x-1=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
Si $x<1$ alors $x-1<0$ et si $x>1$ alors $x-1>0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}x-1=0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}x-1=0^+$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$ et comme $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$.

b) $f'(x) = 2x - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x(x^2-2x+1)-1}{(x-1)^2} = \frac{4x^3-4x^2+2x-1}{(x-1)^2}$
$= \frac{u(x)}{(x-1)^2}$.

c) Pour tout $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$ donc f' est du signe de u sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et on a :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

d) À l'aide d'une table on remarque que $f(-0{,}8) > 0 > f(-0{,}7)$ puis que $f(-0{,}76) > 0 > f(-0{,}75)$ donc $-0{,}76 < \beta < -0{,}75$.

e) $f(x) - x^2 = x^2 + \frac{1}{x-1} - x^2 = \frac{1}{x-1}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x^2 = 0$ (voir question1.a).

Ceci signifie que la distance entre le point d'abscisse x de la courbe et le point d'abscisse x de la parabole tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. C'est pour cette raison que l'on peut dire que la parabole d'équation $y = x^2$ est asymptote à la courbe représentative de f.

3) a) Cet algorithme détermine le plus petit nombre entier X tel que $\frac{1}{X-1} < 10^{-3}$.

b) L'algorithme affiche 1002.