DEVOIR SURVEILLÉ N° 4	
Probabilités conditionnelles, loi binomiale et fonction exponentielle	*Le 20 décembre 2016*

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (3 points) **Restitution organisée de connaissances**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

1. Étudier les variations de f, puis montrer que, pour tout réel x, $f(x) > 0$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
3. En utilisant un changement de variable astucieux, montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Exercice 2 (3 *points*) Polynésie, mai 2015

On justifiera chaque étape des résolutions suivante.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
   a) $e^{x^2+x} = 1$ b) $e^{2x-1} \times e^{x+5} = e^{3-2x}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^{2x+3} < \dfrac{1}{e}$.

Exercice 3 (2 *points)*

1. En mettant en évidence les limites de référence, déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1)e^x$.
2. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x^2}$.

Exercice 4 (6 *points)* **Asie, juin 2014**

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1;1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$ où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation $(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0$.

Dans la suite, on définit sur $[0;+\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f. Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.
2. On note f'' la fonction dérivée de f'. Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, $f''(x) = 4xe^{2x}$.
3. Montrer que, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0. Donner un encadrement au centième de x_0. On pourra calculer $f'(1)$.
4. a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;x_0]$.
   b) Calculer $f(2)$.
   En déduire que sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
   Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

<u>Exercice 5</u> (6 *points)*

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse.
On définit les événements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On justifiera et on donnera les paramètres de cette loi.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 80 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.
3. Quel est le nombre moyen de bouteilles de « pur jus » dans un tel lot ?