Corrigé du D.S. n°4

Exercice 1

1. $f'(x)=e^x-1$, Or $e^x<1 \Leftrightarrow x<0$ donc $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. f atteint donc son minimum en 0 . Comme $f(0)=e^0-0=1-0=1$, $f(x)>0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$. et $f(x)>0 \Leftrightarrow e^x>x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. En posant $X=-x$ on obtient $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{-X}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{X\to-\infty} \dfrac{1}{e^X}=+\infty$. Par limite de l'inverse, on a alors $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$.

Exercice 2

1. a) $e^{x^2+x}=1 \Leftrightarrow e^{x^2+x}=e^0 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0$ donc $x=0$ ou $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. $S=\{-1;0\}$.
   b) $e^{2x-1}\times e^{x+5}=e^{3-2x} \Leftrightarrow e^{(2x-1)+(x+5)}=e^{3-2x} \Leftrightarrow e^{3x+4}=e^{3-2x} \Leftrightarrow 3x+4=3-2x$
   $\Leftrightarrow 5x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$.
2. $e^{2x+3}<\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow e^{2x+3}<e^{-1} \Leftrightarrow 2x+3<-1 \Leftrightarrow x<-2$.

Exercice 3

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x+e^x$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x+e^x=0$.
2. $f(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=x$ donc $u'(x)=1$ et $v(x)=e^{1-x^2}=e^{w(x)}$ avec $w(x)=1-x^2$ donc $w'(x)=-2x$ et donc $v'(x)=w'(x)e^w(x)=-2xe^{1-x^2}$. Par suite,
   $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=1\times e^{1-x^2}+x\times(-2xe^{1-x^2})=(1-2x^2)e^{1-x^2}$

Exercice 4

1. $f'(x)=1\times e^{2x}+(x-1)\times 2e^{2x}-1=(2x-1)e^{2x}-1$.
   $f'(0)=-1e^0-1=-1-1=-2$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$. Comme de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1=+\infty$ on a, par produit puis somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.
2. $f''(x)=2\times e^{2x}+(2x-1)\times 2e^{2x}=4xe^{2x}$.
3. Comme $e^x>0$ pour tout x , f'' est du signe de x et donc strictement positive sur $]0;+\infty[$.
   f' est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$ de plus f' est continue sur $\mathbb{R}$ et 0 appartient à son intervalle image puisque $f'(0)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(0)=0$ admet une unique solution x_0 dans $[0;+\infty[$.

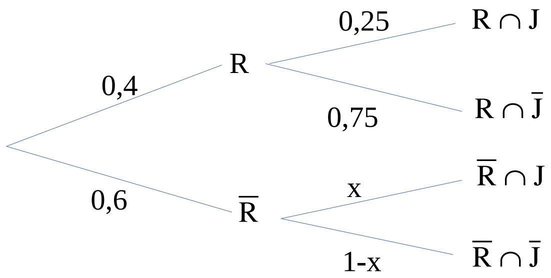
$f'(1) = (2-1)e^2 - 1 = 2e^2 - 1 \approx 6{,}4 > 0$ donc $0 < x_0 < 1$. Par dichotomie, on obtient $0{,}632 < x_0 < 0{,}641$.

4. a) f' est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(x_0) = 0$ donc f' est négative sur $[0\,;x_0]$ et positive sur $[x_0;+\infty[$. Ainsi, f est décroissante sur $[0\,;x_0]$ et croissante sur $[x_0;+\infty[$.
$f(0) = (0-1)e^0 - 1 - 0 = -2$ et f est décroissante sur $[0\,;x_0]$ donc f est négative sur $[0\,;x_0]$.
b) $f(2) = (2-1)e^4 - 1 - 2 = e^4 - 3 \approx 51{,}6 > 0$ or $f(x_0) < 0$ et f est strrictement croissante sur $[x_0;+\infty[$ donc, d'une part $f(x) > f(2) > 0$ sur $[2\,;+\infty[$ donc f ne s'annule pas sur $[2\,;+\infty[$ et d'autre part, f étant continue et 0 appartenant à l'intervalle $[f(x_0)\,;f(2)]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[x_0\,;2]$ et donc sur $[x_0;+\infty[$. Par dichotomie (par exemple) on obtient $a \approx 1{,}20$.

<u>Exercice 5</u>

Partie A

1. On a



2. On a $J = (R \cap J) \cup (\bar{R} \cap J)$. Comme c'est une union disjointe, $p(J) = p(R \cap J) + p(\bar{R} \cap J)$.
Donc $p(J) = p(R) \times p_R(J) + p(\bar{R}) \times p_{\bar{R}}(J) = 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}6 \times x = 0{,}6\,x + 0{,}1$.
Par ailleurs, on sait que $p(J) = 0{,}2$ donc $0{,}6\,x + 0{,}1 = 0{,}2 \Leftrightarrow x = \dfrac{0{,}1}{0{,}6} = \dfrac{1}{6}$.

3. On cherche $p_J(R)$. $p_J(R) = \dfrac{p(J \cap R)}{p(J)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}25}{0{,}2} = \dfrac{1}{2}$

Partie B

1. Choisir une bouteille dans le stock et regarder si c'est une bouteille « pur jus » constitue une epreuve de Bernoulli. Si on assimile le choix des 500 bouteilles à un tirage avec remise, alors cela constitue 500 epreuves de Bernoulli indépendantes et donc un shéma de Bernoulli. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0{,}2$ (probabilité qu'une bouteille soit « pur jus »).

2. Si X suit une loi binomiale $B(500\,;0{,}2)$, $p(X \geq 80) \approx 0{,}990$.

3. Il s'agit de determiner l'espérance de X , Dans ce cas on a $E(X) = n\,p = 500 \times 0{,}2 = 100$.