DEVOIR SURVEILLÉ N° 5	
Nombres complexes et fonction logarithme népérien	***Le 25 janvier 2017***

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

<u>Exercice 1</u> (4 *points*)

Toutes les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre les équations suivantes en prenant soin de déterminer l'ensemble sur lequel votre calcul est valable. On visualisera cet ensemble sur une droite orientée.
   a) $\ln(x)+\ln(x-1)=\ln(6)$ b) $\ln(3x)+\ln(2-x)=\ln(2)$
2. a) Résoudre l'équation suivante : $X^2-2X-15=0$.
   b) En déduire les solutions des équations suivantes :
   i) $e^{2x}-2e^x-15=0$ ii) $(\ln(x))^2-2\ln(x)-15=0$
3. Résoudre les inéquations suivantes en ayant soin de déterminer l'ensemble sur lequel votre calcul est valable. On visualisera l'ensemble solution sur une droite orientée.
   a) $\ln(x)+\ln(2x+5)\leq\ln(3)$ b) $\ln(x^2-x-2)>2\ln(3-x)$
4. On cherche le plus petit entier n tel que : $1-\left(\frac{1}{5}\right)^n>0{,}999$.
   a) Résoudre cette inéquation algébriquement.
   b) Proposer une vérification algorithmique de votre résultat.

<u>Exercice 2</u> (4 *points*)

Toutes les questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   a) $f(x)=2x+\ln(\frac{x+1}{x})$ b) $g(x)=\frac{x+\ln(x)}{x^2}$
2. Calculer les limites suivantes en vous justifiant soigneusement :
   a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{2x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x>0}}\ln(e^x-1)$.

<u>Exercice 3</u> (5 *points*)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)-2+x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. ***Restitution organisée de connaissances***
   On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction f , puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation*
   Existe-t-il des tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ qui contiennent le point O origine du repère ?
   Si oui donner leur équation.

<u>Exercice 4</u> (2 points)

On considère le nombre complexe $a = \left(-\sqrt{3}+i\right)^{2013}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de $-\sqrt{3}+i$.
2. Montrer que a est un imaginaire pur.

<u>Exercice 5</u> (5 points) **Nouvelle-Calédonie, mars 2016**

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n , par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ de la figure de l'annexe.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n .

1. a) Vérifier que $1+i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   b) En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel n , $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.

   b) Pour quelles valeurs de n , les points O , A_0 et A_n sont-ils alignés ?
3. Pour tout entier naturel n , on pose $d_n = z_{n+1}-z_n$.
   a) Interpréter géométriquement d_n .
   b) Calculer d_0 .
   c) Montrer que pour tout entier naturel n , $z_{n+2}-z_{n+1} = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(z_{n+1}-z_n\right)$.
   d) En déduire que la suite (d_n) est géométrique, puis que pour tout entier naturel n , $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.
4. a) Montrer que pour tout entier naturel n , $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2+d_n^2$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n .
   c) Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe à rendre avec la copie.
   d) Justifier cette construction.

ANNEXE