Corrigé du D.S. n°5

Exercice 1

1. a) On doit avoir $x > 0$ et $x-1 > 0$ donc l'ensemble sur lequel le calcul est valable est $]1;+\infty[$.
$\ln(x)+\ln(x-1) = \ln(6) \Leftrightarrow \ln(x(x-1)) = \ln(6) \Leftrightarrow x(x-1) = 6$ (avec $x > 1$).
Or $x(x-1) = 6 \Leftrightarrow x^2-x-6 = 0$ et pour cette équation du second degré, $\Delta = 25$ puis $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$. Étant donné les conditions posées, l'équation admet comme unique solution $\boldsymbol{x = 3}$.
b) On doit avoir $3x > 0$ et $2-x > 0$ donc l'ensemble sur lequel le calcul est valable est $]0;2[$.
$\ln(3x)+\ln(2-x) = \ln(2) \Leftrightarrow \ln(3x(2-x)) = \ln(2) \Leftrightarrow 3x(2-x) = 2$ (sur $]0;2[$).
Or $3x(2-x) = 2 \Leftrightarrow 3x^2-6x+2 = 0$ et pour cette équation du second degré, $\Delta = 12$ puis $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}42$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}58$. Ces deux valeurs deux valeurs appartiennent à l'intervalle $]0;2[$ donc $\boldsymbol{S=\left\{\dfrac{3-\sqrt{3}}{3};\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right\}}$

2. a) Pour l'équation du second degré $X^2-2X-15 = 0$ On a $\Delta = 64$ puis $X_1 = -3$ et $X_2 = 5$.
b) i) En posant $e^x = X$, l'équation est équivalente à l'équation précedente et on doit donc résoudre $e^x = -3$ qui n'a pas de solution et $e^x = 5$ qui donne $x = \ln(5)$. l'unique solution de cette équation est donc $\boldsymbol{\ln(5)}$.
ii) On résoud l'équation dans $]0;+\infty[$.
En posant $\ln(x) = X$, l'équation est équivalente à l'équation du a) et on doit donc résoudre $\ln(x) = -3$ qui donne $x = e^{-3}$ et $\ln(x) = 5$ qui donne $x = e^5$. Ces deux valeurs sont naturellement positives, donc $\boldsymbol{S=\{e^{-3};e^5\}}$.

3. a) On doit avoir $x > 0$ et $2x+5 > 0$ donc l'ensemble sur lequel le calcul est valable est $]0;+\infty[$.
$\ln(x)+\ln(2x+5) \leq \ln(3) \Leftrightarrow \ln(x(2x+5)) \leq \ln(3) \Leftrightarrow x(2x+5) \leq 3 \Leftrightarrow 2x^2+5x-3 \leq 0$.
Pour le trinôme du second degré $2x^2+5x-3$, $\Delta = 49$ puis $x_1 = -3$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$. Ce trinôme est négatif entre ses racines donc sur $\left[-3;\dfrac{1}{2}\right]$. Compte tenu des conditions de résolution, on obtient $\boldsymbol{S = \left]0;\dfrac{1}{2}\right]}$.
b) On doit avoir $x^2-x-2 > 0$ et $3-x > 0$. La première inéquation, après recherche des racines du trinôme, donne $x < -1$ ou $x > 2$. La deuxieme inéquation donne $x < 3$. L'ensemble de validité est donc $]-\infty;-1[\cup]2;3[$.
$\ln(x^2-x-2) > 2\ln(3-x) \Leftrightarrow \ln(x^2-x-2) > \ln((3-x)^2) \Leftrightarrow x^2-x-2 > (3-x)^2 \Leftrightarrow x > \dfrac{11}{5}$.
Avec les conditions de résolution, on obtient $\boldsymbol{S = \left]\dfrac{11}{5};3\right[}$.

4. a) $1-\left(\frac{1}{5}\right)^n > 0{,}999$. Comme $\ln\left(\frac{1}{5}\right) < 0$, il vient $n > \frac{\ln(0{,}001)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$. $\frac{\ln(0{,}001)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \approx 4{,}3$ et comme

n est entier, on obtient $n \geq 5$

b) L'algorithme suivant répond à la question

Entrée	n est un nombre
Initialisation	n prend la valeur 0
Traitement	Tant que $1-\left(\frac{1}{5}\right)^n \leq 0{,}999$ n prend la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

Exercice 2

1. a) $f(x) = u(x)+\ln(v(x))$ avec $u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = \frac{x+1}{x}$ donc

$v'(x) = \frac{1\times x-1\times(x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$. Par suite on a :

$$f'(x) = u'(x)+\frac{v'(x)}{v(x)} = 2+\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = 2-\frac{1}{x(x+1)} .$$

b) $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x+\ln(x)$ donc $u'(x) = 1+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ et $v(x) = x^2$ donc

$v'(x) = 2x$. Par suite, $g'(x) = \frac{(\frac{x+1}{x})\times x^2-(x+\ln(x))\times 2x}{x^4} = \frac{-x+1-2\ln(x)}{x^3}$.

2. a) $\frac{2\ln(x)+1}{2x} = \frac{\ln(x)}{x}+\frac{1}{2x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par somme de limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)+1}{2x} = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$. En posant $X = \frac{1}{x}$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 .$$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x-1 = e^0-1 = 1-1 = 0$ de plus, si $x > 0$, alors $e^x-1 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x-1 = 0^+$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$, on a alors, par composition, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(e^x-1) = -\infty$.

Exercice 3

1. Posons $X=\ln(x)$ donc $x=e^X$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} X=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln(e^X)}{e^X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, donc, par inverse, $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=0$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.
2. $\lim\limits_{x\to0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}-2+x=-2$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-2+x=+\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
3. Les fonction $x\to\ln(x)$ et $x\to-2+x$ sont croissantes. f est la somme de deux fonctions croissantes donc f est croissante. On a donc :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $0\in]-\infty;+\infty[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.
   On a $f(1)=-1<0$ et $f(2)=\ln(2)>0$ donc $1<\alpha<2$. On trouve ensuite, par exemple par dichotomie, $1{,}55<\alpha<1{,}56$.
5. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. Or $f'(x)=\frac{1}{x}+1=\frac{1+x}{x}$ donc l'équation précédente est $y=\frac{a+1}{a}(x-a)+\ln(a)-2+a$ ce qui revient à $y=\frac{a+1}{a}x+\ln(a)-3$. Une droite non verticale passe par le point de coordonnées $(0;0)$ si et seulement si l'ordonnée à l'origine de son équation réduite est nulle. La tangente précédente passe donc par O quand $\ln(a)-3=0$ c'est-à-dire quand $a=e^3$.

Exercice 4

1. $|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^1}=\sqrt{4}=2$ puis $-\sqrt{3}+i=2(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=2(\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6}))=2e^{\frac{5i\pi}{6}}$
2. $a=(-\sqrt{3}+i)^{2013}=(2e^{\frac{5i\pi}{6}})^{2013}=2^{2013}e^{\frac{5\times2013i\pi}{6}}=2^{2013}e^{\frac{5\times2013i\pi}{6}}=2^{2013}e^{\frac{3355i\pi}{2}}$. L'argument de a est donc $3355\frac{\pi}{2}=839\times2\pi-\frac{\pi}{2}$ ce qui revient à $\frac{-\pi}{2}$ et a est donc un imaginaire pur.

Exercice 5

1. a) $1+i\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6}))=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
   b) $z_1=\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_0=\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times1=1+i\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et
   $z_2=\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_1=\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)==(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}})^2=\frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. a) Soit P_n la proposition : $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.

$z_0 = 1$ et $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 e^{0i\frac{\pi}{6}} = 1$ donc P_0 est vraie.

Supposons que la proposition P_k soit vraie, c'est-à-dire $z_k = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^k e^{ik\frac{\pi}{6}}$. On a alors

$z_{k+1} = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_k = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) e^{i\frac{\pi}{6}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^k e^{ik\frac{\pi}{6}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{k+1} e^{i(k+1)\frac{\pi}{6}}$ donc la proposition P_{k+1} est vraie et comme P_0 est vraie, on peut alors affirmer que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

b) Les point O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_n}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Or, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_n}) = arg(z_n) - arg(z_0) = arg(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}) - arg(1) = \frac{n\pi}{6}$ la condition devient donc

$\frac{2n\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow n = 6k$ et O, A_0, et A_n sont alignés si et seulement si n est multiple de 6.

3. a) d_n est la distance entre les points d'affixe z_n et z_{n+1} donc $d_n = A_n A_{n+1}$.

b) $d_0 = |z_1 - z_0| = |1+i\frac{\sqrt{3}}{3} - 1| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $z_{n+2} - z_{n+1} = (1+i\frac{\sqrt{3}}{3}) z_{n+1} - (1+i\frac{\sqrt{3}}{3}) z_n = (1+i\frac{\sqrt{3}}{3})(z_{n+1} - z_n)$.

d) $d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = |(1+i\frac{\sqrt{3}}{3})(z_{n+1} - z_n)| = |1+i\frac{\sqrt{3}}{3}| \times |z_{n+1} - z_n| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\, d_n = \frac{2}{\sqrt{3}} d_n$.

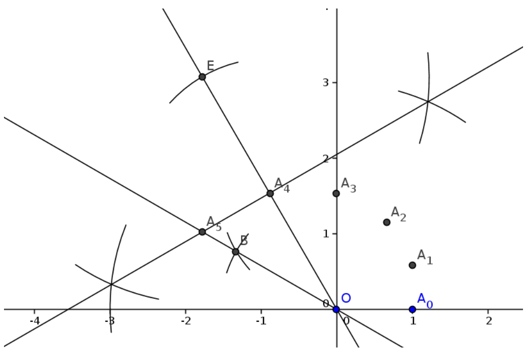
(d_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et on a donc $d_n = d_0 \times q^n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

4. a) $|z_{n+1}|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2}$ et $d_n^2 + |z_n|^2 = \frac{3}{9}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = (\frac{1}{3}+1)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$ or $\frac{4}{3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

donc $d_n^2 + |z_n|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2}$ et donc $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$.

b) $d_n = A_n A_{n+1}$ donc $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2 \Leftrightarrow OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_n A_{n+1}^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $O A_n A_{n+1}$ est rectangle en A_n.

c)



d) Avec le compas, on costruit le point B tel que OA_3B soit un triangle équilatéral direct. de cette façon, on a $(\overrightarrow{OA_4}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6}(2\pi)$ et le point A_5 appartient à la demi-droite $[OB)$. Il reste à construire la perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4, que l'on obtient par exemple comme la médiatrice de $[OE]$, où E est le symétrique de O par rapport à A_4.